Gödel ∀ (para todos)

Guillermo Martínez & Gustavo Ernesto Piñeiro



El teorema de incompletitud de Gödel es uno de los resultados más profundos y paradójicos de la lógica matemática. Es también, quizá, el que ha ejercido más fascinación en ámbitos alejados de las ciencias exactas. Citado en disciplinas tan diversas como la semiótica y el psicoanálisis, la filosofía y las ciencias políticas, el fenómeno de incompletitud se ha asociado también a supuestas derrotas de la razón y al fin de la certidumbre en el terreno más exclusivo del pensamiento: el reino de las fórmulas exactas. Pero también desde el interior de la ciencia se esgrime el teorema de Gödel en agudas controversias epistemológicas, como la que rodea las discusiones sobre inteligencia artificial. Surgido casi a la par de la Teoría de la Relatividad, y de manera quizá más sigilosa, el teorema de Gödel se ha convertido en una pieza fundamental y una referencia ineludible del pensamiento contemporáneo.

Con el propósito de hacerlo accesible a un público que no necesariamente tenga formación matemática, Guillermo Martínez y Gustavo Piñeiro han logrado una exposición detallada, rigurosa, pero de extrema suavidad, totalmente autocontenida: magistral. También discuten con autores como Kristeva, Lacan, Debray, Deleuze, y Lyotard, quienes han invocado a Gödel y sus teoremas en arriesgadas analogías.

El logro notable de este libro es que tanto las personas de cualquier disciplina que sólo tengan la imprescindible «curiosidad de espíritu» como los que hayan estudiado los teoremas de Gödel podrán aventurarse a la experiencia de conocer en profundidad una de las hazañas intelectuales más extraordinarias de nuestra época; porque si bien empieza de cero, llega mucho más allá de lo que se han propuesto las divulgaciones más conocidas en lengua castellana.

Guillermo Martínez & Gustavo Piñeiro

Gödel ∀ (para todos)

El teorema matemático que ha fascinado más allá de las ciencias exactas

Guillermo Martínez & Gustavo Piñeiro, 2009
Diseño de cubierta: koothrapali

Editor digital: Titivillus
Primer editor digital: koothrapali (r1.0-r1.1)
Corrección de erratas: Un_Tal_Lucas, nekrodamus, aigor
ePub base r2.0

Para Robert Cignoli, de su alumno descarriado
GUILLERMO MARTÍNEZ

A Gisela, y a Carolina y Diana
GUSTAVO PIÑEIRO

INTRODUCCIÓN

El Teorema de Incompletitud de Gödel es uno de los resultados más profundos y paradójicos de la lógica matemática. Es también, quizás, el teorema que ha ejercido más fascinación en ámbitos alejados de las ciencias exactas. Ha sido citado en disciplinas tan diversas como la semiótica y el psicoanálisis, la filosofía y las ciencias políticas. Autores como Kristeva, Lacan, Debray, Deleuze, Lyotard, y muchos otros, han invocado a Gödel y sus teoremas en arriesgadas analogías. Junto con otras palabras mágicas de la escena posmoderna como «caos», «fractal», «indeterminación», «aleatoriedad», el fenómeno de incompletitud se ha asociado también a supuestas derrotas de la razón y al fin de la certidumbre en el terreno más exclusivo del pensamiento: el reino de las fórmulas exactas. Pero, también, desde el interior de la ciencia se esgrime el Teorema de Gödel en agudas controversias epistemológicas, como la que rodea las discusiones sobre inteligencia artificial. Surgido casi a la par de la Teoría de la Relatividad, y de manera quizá más sigilosa, el Teorema de Gödel se ha convertido en una pieza fundamental y una referencia ineludible del pensamiento contemporáneo.

Pero, a diferencia de la teoría de Einstein, en que por la sofisticación de las ecuaciones los mejores intentos de divulgación parecen condenados a ejemplos con relojes y personas que no envejecen en viajes por el espacio —la clase de divulgación que arrancó la conocida broma de Sabato[1]—, en el caso del Teorema de Incompletitud hay una buena noticia, y es que puede darse una exposición a la vez rigurosa y accesible, que no requiere ninguna formación matemática, más que el recuerdo de la suma y la multiplicación tal como se enseñan en la escuela primaria.

Eso es exactamente lo que nos propusimos hacer en este libro: una exposición detallada, pero de extrema suavidad, totalmente autocontenida, que permita a las personas de cualquier disciplina que sólo tengan la imprescindible «curiosidad de espíritu» aventurarse a la experiencia de conocer en profundidad una de las hazañas intelectuales más extraordinarias de nuestra época.

Pensamos y concebimos *Gödel ∀ (para todos)* como un juego por etapas, con la esperanza de que los lectores se desafíen a sí mismos a pulsar *enter* al final de cada capítulo para pasar al próximo nivel. El juego empieza realmente desde cero y gran parte de nuestro esfuerzo fue intentar la mayor claridad posible en cada una de estas etapas para que, idealmente, cada lector pueda llegar tan lejos como se proponga.

Una palabra sobre el título: cada vez que se agrega «para todos» al título de libros de divulgación (y mucho más cuando el libro se refiere a cuestiones o autores considerados «difíciles»), se sobreentiende que el «para todos» es en realidad un eufemismo entre condescendiente y piadoso, que oculta al verdadero «para los que no saben nada de nada». No es el caso de este libro. Cuando decimos «para todos» nos referimos más bien al verdadero significado que tiene la expresión, en todo su alcance. Nuestro libro está dirigido no sólo a los que «no saben nada de nada», sino también a los lectores que hayan leído sobre el Teorema de Gödel en exposiciones parciales, y aun a los que hayan estudiado los teoremas de Gödel y sus demostraciones en profundidad. Porque si bien nuestro libro empieza de cero, llega mucho más allá de lo que se han propuesto las divulgaciones más conocidas en lengua castellana. En particular, damos una demostración rigurosa y con todos los detalles de los teoremas, aunque en una aproximación diferente de la más habitual, novedosa por su sencillez, en la que utilizamos la mínima cantidad posible de tecnicismos matemáticos. Hemos incluido también un último capítulo con una investigación propia del fenómeno de incompletitud en un contexto general y problemas abiertos, para mostrar la prolongación que tienen estas ideas y las preguntas que los teoremas de Gödel, todavía hoy, siguen suscitando.

El material está organizado de la siguiente manera:

- En el primer capítulo damos un panorama general, y una primera aproximación informal, tanto de los enunciados de los teoremas de Gödel como de algunas derivaciones filosóficas.
- En el capítulo 2 exponemos el contexto histórico y el estado de la discusión en los fundamentos de la matemática en el momento en que irrumpen los resultados de Gödel. Al final del capítulo incluimos una sección sobre las tergiversaciones y errores más frecuentes en torno de la divulgación de los enunciados.
- En el capítulo 3 introducimos el lenguaje formal necesario para enunciar los teoremas con toda la exactitud necesaria, y abrir paso a las demostraciones.

Los tres capítulos terminan aparentemente de la misma manera, con el enunciado de los teoremas de Gödel. Pero nuestra intención y esperanza es que se lean, cada vez, con una comprensión más profunda, y con el nuevo sentido y la mayor precisión que se incorpora en cada etapa.

- En el capítulo 4 exponemos algunas analogías e intentos de aplicación del Teorema de Gödel en distintas disciplinas sociales, fuera de la matemática. En particular analizamos textos de Julia Kristeva, Paul Virilio, Régis Debray, Gilles Deleuze y Félix Guattari, Jacques Lacan, y Jean-François Lyotard.

Esto concluye la primera parte.

La segunda parte está dedicada a la demostración de los teoremas. La prueba que damos tiene, creemos, la mínima cantidad posible de tecnicismos matemáticos. Mostramos, esencialmente, que toda la argumentación de Gödel puede desarrollarse a partir de un único hecho matemático: la existencia en la aritmética de una operación que refleja la manera en que las letras de un lenguaje se yuxtaponen unas a continuación de las otras para formar palabras.

La tercera parte, finalmente, está dedicada a una exploración propia sobre el fenómeno de incompletitud en un contexto más general y abstracto. Nos preguntamos cuál es el hecho matemático que puede rastrearse en otros objetos, y que «divide aguas» entre teorías completas e incompletas.

Casi todos los capítulos incluyen al final una sección de ejercicios. Después de algunas dudas decidimos agregar también la resolución. Esperamos que esto sea un estímulo adicional para pensar primero «sin ayuda» una solución propia y sólo después comparar con la que proponemos en cada caso.

El libro se completa con tres apéndices: el primero, para consulta durante la lectura, reúne una variedad de teorías que sirven de ejemplo o contraejemplo a distintas afirmaciones. El segundo es una selección de textos de los propios protagonistas —Cantor, Russell, Hilbert, etc.— sobre los hitos principales del fenómeno de incompletitud, que dan en conjunto una pequeña historia del tema. El tercero es una biografía de Kurt Gödel, con una cronología de su vida.

Hemos dejado en el último capítulo preguntas abiertas y quizás algunos lectores se propongan también el desafío de responderlas. Otros lectores, tal vez, quieran hacernos llegar sugerencias o críticas sobre distintos puntos de nuestra exposición, o señalarnos errores que se nos hayan deslizado. Decidimos por eso abrir un *blog* para recibir comentarios:

www.godelparatodos.blogspot.com

Pondremos allí también en forma completa algunos de los textos citados que debimos resumir para el formato libro, y también distintos artículos de la bibliografía que nos resultaron particularmente interesantes.

Queremos finalmente agradecer a Xavier Caicedo por varias conversaciones y explicaciones esclarecedoras sobre puntos delicados de la teoría y también la lectura final generosa y atenta de Pablo Coll, Gisela Serrano y Pablo Amster.

Para esta nueva edición española quisiéramos agradecer también los comentarios y aportes de Verónica Becher, Roberto Cignoli, Cristian Caravello, Máximo Dickmann, Francisco Espinosa, Javier Fresán, Hernán González, Tomás Ibarlucía, María Celia Ibarra, Pablo Kaczor, Laureano Luna, Luciano Robino y Enzo Tagliazucchi.

PRIMERA PARTE

CAPÍTULO UNO

UN PANORAMA GENERAL

Lo verdadero y lo demostrable. Los sistemas axiomáticos formales. Completitud y axiomas. El infinito: La *bête noire* en los fundamentos de la matemática. El Teorema de Incompletitud. La prueba original de Gödel. El Teorema de Consistencia. Extensión y alcance del Teorema de Gödel. Precauciones. Gödel, las computadoras y la inteligencia artificial. Derivaciones filosóficas. Ejemplos y ejercicios.

> Hay un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros. No hablo del Mal, cuyo limitado imperio es la ética; hablo del infinito.
>
> JORGE LUIS BORGES
> *Avatares de la tortuga*

§ 1. LO VERDADERO Y LO DEMOSTRABLE

El Teorema de Incompletitud de Gödel trata de la verdad en matemática y de la parte de verdad que puede ser comprobada a partir de axiomas, en esos fragmentos de texto de líneas sucesivas encadenadas por pasos lógicos que los matemáticos llaman *demostración*.

En otras disciplinas del conocimiento siempre ha sido claro que lo verdadero no necesariamente coincide con lo demostrable. Imaginemos, para dar una analogía con la justicia, que se comete un crimen en un cuarto cerrado y que el juez de instrucción, al llegar, encuentra que hay únicamente dos sospechosos junto al cadáver.

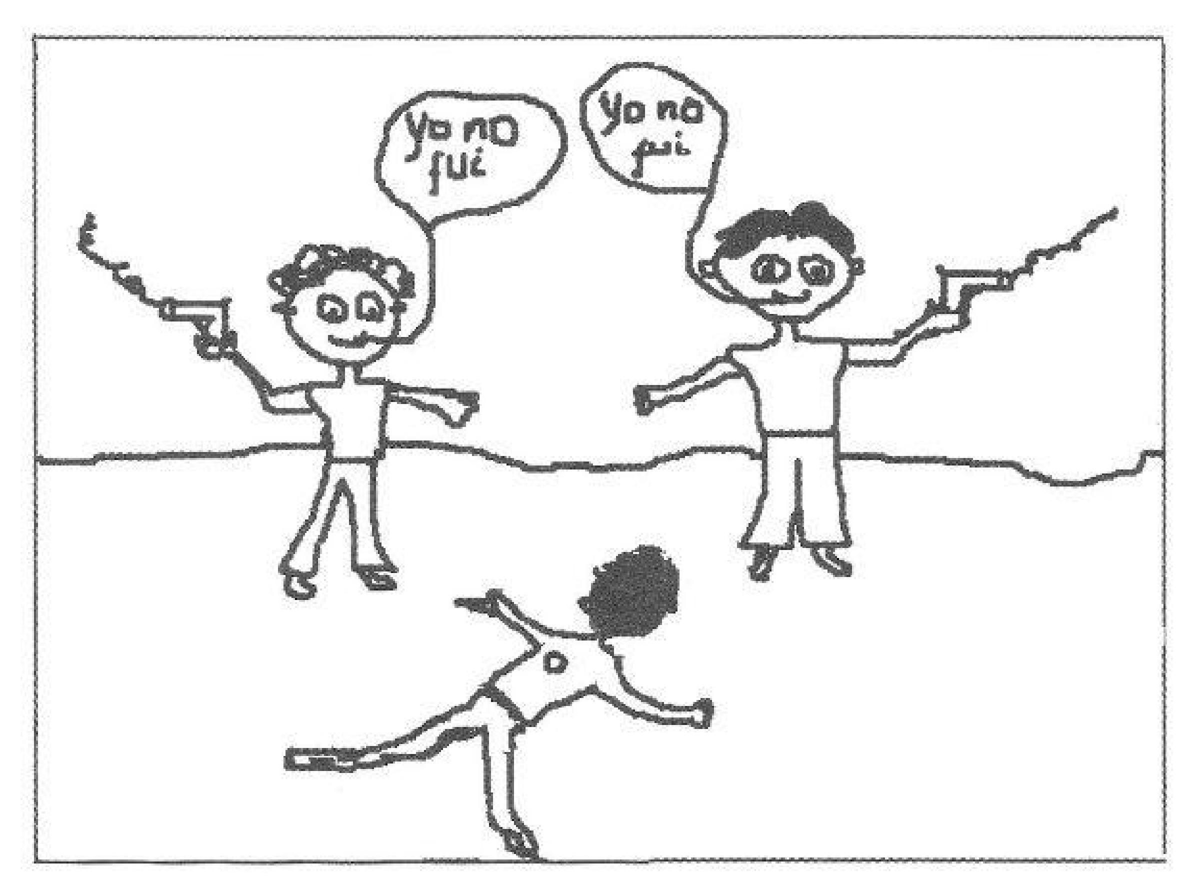


Fig. 1: *La cuestión de lo demostrable empieza cuando los dos dicen: «Yo no fui».*

Cualquiera de estos dos sospechosos sabe toda la verdad sobre el crimen, que puede resumirse en la frase «Yo fui» o «Yo no fui». Es decir, la cuestión de la verdad del suceso, que hubo un crimen y hay un culpable, no está en duda. Sin embargo, si el juez no dispone de la confesión directa del culpable, debe intentar un camino indirecto: recolección de evidencias materiales, verificación de horarios y coartadas, huellas dactilares, etc. Muchas veces este camino indirecto no alcanza a demostrar, de acuerdo con los estrictos requisitos legales, ni la culpabilidad de uno ni la inocencia del otro. Hay una verdad, pero el método, a veces, es insuficiente para demostrarla de acuerdo a la exigencia de sus propios protocolos. Algo similar ocurre en la arqueología, en las hipótesis alrededor de una excavación. Hay también una verdad precisa, que corresponde a lo que en una época determinada fueron esos seres humanos, con sus rituales y costumbres, pero los arqueólogos sólo pueden inferir, a partir de los despojos que encuentran, versiones parciales de esa verdad. En este caso la verdad es como un límite, la sucesión en el tiempo de restos hallados, e hipótesis provisorias.

En muchos otros campos del conocimiento están representados estos dos mundos distintos, lo verdadero y lo demostrable. Aunque se solapan, no necesariamente coinciden. Curiosamente, los matemáticos, por lo menos hasta el siglo XIX,[2] siempre pensaron que en su disciplina los dos mundos eran identificables, y que cualquiera que fuera la verdad que pudieran observar en el mundo platónico de los objetos matemáticos bajo estudio (cierto orden, ciertas conexiones, cierto patrón de

regularidad), esa verdad podría reobtenerse «por escrito» mediante el método axiomático, como tesis de una demostración. Sin embargo, el Teorema de Incompletitud de Gödel puso en evidencia una limitación intrínseca a las demostraciones basadas en sistemas de axiomas. Pero para entender qué dice exactamente el teorema (y qué *no* dice) debemos precisar mejor qué entienden los matemáticos por *demostración* y por *sistema axiomático*.

Una *demostración* en matemática es una cadena de afirmaciones, de oraciones afirmativas, en las que aparecen fórmulas y consideraciones lógicas (véase por ejemplo la Fig. 2).

$1+1=2$

Demostración:

$\forall x\,(x+0=x)$ Ax.

Si $x=1$, $1+0=1$

$\forall x\,\forall y\,(x+S(y)=S(x+y))$ Ax.

Si $x=1, y=0$, $1+S(0)=S(1+0)=S(1)$

Entonces $1+S(0)=S(1)$

Pero $S(0)=1$ y $S(1)=2$

Por lo tanto $1+1=2$, q.e.d.

Fig. 2: *Pizarrón con líneas de una demostración. Q.E.D. son las letras con que los matemáticos terminan una demostración y significan «Como queríamos demostrar» (quod erat demonstrandum).*

Cada una de estas afirmaciones, también llamadas *enunciados*, es, o bien un axioma (un enunciado que se da por válido al inicio del razonamiento), o bien se obtiene de eslabones anteriores en la cadena por reglas lógicas bien determinadas. Los *teoremas* son los enunciados que admiten una demostración.

Una vez escrita una demostración —y éste es quizás el punto más sólido de la matemática como ciencia— cualquiera puede detenerse cuanto quiera entre paso y paso para inspeccionar la corrección del argumento. Más aún, idealmente incluso una persona sin conocimientos matemáticos debería ser capaz de seguir y corroborar una demostración verificando cada una de las ligaduras lógicas. Es un procedimiento casi mecánico, similar al de la computadora que dibuja rayitas rectas, en píxels muy

pequeños, sin saber que al final conformarán una figura de complejidad insospechada.

Repetimos entonces: una demostración es una sucesión en general muy larga de enunciados, que se encadenan uno a otro por pasos muy elementales, estrictamente lógicos. Estos pasos pueden examinarse con todo el detenimiento necesario para tener la absoluta seguridad de que no se ha cometido ningún error. Cuando el razonamiento es profundo, la tesis, aunque se desprende necesariamente de la sucesión de pasos, sorprende con respecto a los axiomas, de la misma manera que la secuencia de actos inocentes de un ilusionista no hace esperar el efecto maravilloso final. La inteligencia, la creatividad, estuvo *antes*, en la elección inspirada de cada paso para encontrar, entre todas las posibles bifurcaciones, el camino oculto que lleva de los axiomas a la tesis.

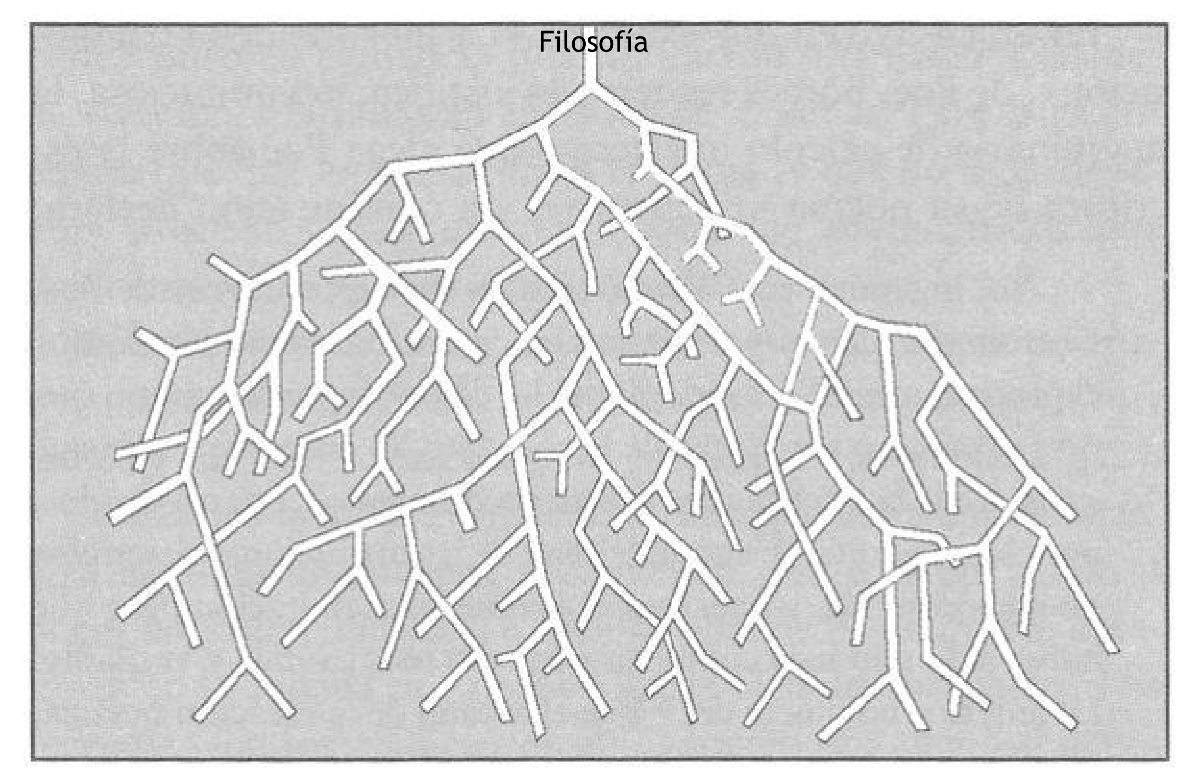


Fig. 3: *La demostración como un laberinto de bifurcaciones. El camino es «fácil» sólo después de marcado.*

En un ensayo en que examina «La filosofía de la composición», de Poe, Borges recuerda la justificación minuciosa, la maquinaria de cálculo intelectual que alega Poe sobre la escritura de su poema «El cuervo», y a continuación declara:

> Yo, ingenuamente acaso, creo en las explicaciones de Poe. Descontada alguna posible ráfaga de charlatanería, pienso que el proceso mental aducido por él ha de corresponder, más o menos, al proceso verdadero de la creación. Yo estoy seguro de que así procede la inteligencia: por arrepentimientos, por obstáculos, por eliminaciones. La complejidad de las operaciones descriptas no me incomoda, sospecho que la efectiva

> elaboración tiene que haber sido aún más compleja y mucho más caótica y vacilante. Lo anterior no quiere decir que el arcano de la creación poética, de esa creación poética, haya sido revelado por Poe.
>
> *En los eslabones examinados la conclusión que el escritor deriva de cada premisa es, desde luego, lógica, pero no la única necesaria.* [Borges]

Si cambiamos en la frase final «escritor» por «matemático» la analogía con una demostración en matemática es perfecta: porque también aquí «*en los eslabones examinados la conclusión que el* matemático *deriva de cada premisa es, desde luego, lógica, pero no la única necesaria*».

§ 2. Los sistemas axiomáticos formales

Dijimos antes que incluso una persona sin conocimientos matemáticos debería ser capaz de seguir y corroborar una demostración. En el fondo, la idea que está en el corazón de las demostraciones a partir de axiomas es que cada demostración pueda ser corroborada de una manera absolutamente mecánica, sin que sea necesario «entender» qué dice cada línea, en una cantidad finita de pasos lógicos. El cumplimiento de este requisito para las demostraciones está íntimamente ligado a la manera de elegir y fijar en cada caso el conjunto de axiomas. En realidad, la condición crítica que debe pedirse al conjunto de axiomas es la siguiente:

> (R) *Dado un enunciado cualquiera, puede determinarse, en una cantidad finita de pasos, si el enunciado pertenece o no al conjunto de axiomas.*

Esta pequeña precisión técnica, dada por la condición (R) —que en la mayoría de las divulgaciones no se menciona— es fundamental para enunciar y entender en su verdadero alcance el Teorema de Gödel. Diremos en lo sucesivo, para seguir el nombre que le dio originariamente Gödel, que un conjunto de axiomas es *recursivo* si verifica esta condición. Todo conjunto dado por una lista finita de axiomas es recursivo, pero también hay conjuntos infinitos de axiomas que son recursivos. (Véanse los Ejercicios 1.1 y 1.2 al final del capítulo). La importancia de esta definición, repetimos, es que:

> *Toda demostración a partir de un conjunto recursivo de axiomas puede corroborarse en una cantidad finita de pasos.*

Probaremos esto en el próximo capítulo. Vale también que si un conjunto de axiomas es recursivo, todas las demostraciones a que puede dar lugar el conjunto de axiomas

pueden ser generadas mecánicamente por una computadora. (Véase el Ejercicio 1.4.)

§ 3. Completitud y axiomas

Históricamente, la noción de *axioma* estuvo primero asociada a la noción de verdad, y a la posibilidad de seleccionar, en cierta área u objeto de estudio, una parte de los enunciados verdaderos, algunos «pocos» principios críticos, bien determinados, que permitieran reobtener el todo.

En este sentido, diremos que un conjunto de enunciados verdaderos seleccionados como axiomas es *completo* si pueden reobtenerse, vía demostraciones, como teoremas, todos los enunciados verdaderos del área o del objeto que nos proponemos axiomatizar.

Dado un objeto matemático **O**, si consideramos el conjunto *T*(**O**) de *todos* los enunciados verdaderos en **O**, este conjunto siempre puede postularse como un conjunto de axiomas completo para **O**. Se lo llama la axiomatización *trivial*: la demostración de cada enunciado verdadero consta de una sola línea. Pero, en general, este conjunto no es recursivo, los axiomas no pueden reconocerse efectivamente, o ser presentados a través de una lista, y esta axiomatización trivial no sirve por lo tanto a los propósitos de establecer demostraciones que puedan ser corroboradas mecánicamente. La condición (R) también captura la noción de «pocos» y de «bien determinados», «dados por una lista». En efecto, vale que si el conjunto de axiomas es recursivo, los axiomas pueden presentarse efectivamente en una lista (posiblemente infinita). (Véase el Ejercicio 1.4.)

§ 4. El infinito: La *béte noire* en los fundamentos de la matemática

A principios del siglo XX, a partir del surgimiento de paradojas y de una crisis en los fundamentos de la matemática que examinaremos con más detalle en el próximo capítulo, los matemáticos quisieron evitar hasta donde fuera posible, dentro de las demostraciones, los razonamientos y los procedimientos que involucraran el infinito considerado «todo a la vez», y se preguntaron si podrían restringirse, entre todas las demostraciones, y para probar cualquier resultado, únicamente a aquellas que no necesitaran invocar el infinito como una totalidad (el infinito *actual*, según la definición de Aristóteles, véase el Apéndice II) o que lo hicieran de una manera «segura». La intención era refundar la matemática sobre bases sólidas y libres de contradicciones, a partir de sistemas axiomáticos. Un *sistema axiomático* (o *teoría*) no es más que un conjunto determinado de axiomas con las reglas lógicas que permiten desarrollar las demostraciones.

Es natural entonces, para este propósito de refundación, que la primera condición que se pida a un sistema axiomático es que no dé lugar a contradicciones. Esta condición se llama *consistencia*. Un sistema axiomático es *consistente* si no puede probarse a partir de los axiomas una contradicción, es decir, un enunciado y su negación.

El desafío propuesto por David Hilbert, en lo que se llamó el *programa formalista*, era encontrar un sistema axiomático consistente y abarcador, de gran alcance, que permitiera reobtener, a través de demostraciones «seguras», todos los resultados verdaderos de la matemática. Esto permitiría decidir la verdad o falsedad de cada afirmación matemática de manera puramente sintáctica, en el siguiente sentido: si la afirmación fuera verdadera, sería uno de los teoremas del sistema axiomático; y si la afirmación fuera falsa, su negación sería uno de los teoremas del sistema.

Los dos sistemas elementales y extensivos en los que se pensaba para basar toda la matemática, y en los que se ensayó esta clase de aproximación axiomática, eran la teoría de conjuntos y la *aritmética elemental*, es decir, los números que usamos para contar con las operaciones de suma y multiplicación. En particular el propio Hilbert se había dedicado a buscar un sistema axiomático para la aritmética y estaba convencido, a pesar de las dificultades que encontraba, de que finalmente tendría éxito (véase, por ejemplo [Bernays] o [Hilbert (1)]).

En las primeras líneas de su famoso trabajo de 1931, «*Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sistemas relacionados*» (véase [Gödel (1)] o [Davis]), Gödel hace un balance de la situación:

> Es bien sabido que el desarrollo de la matemática en la dirección de la mayor precisión ha conducido a la formalización de extensos territorios de la matemática, en el sentido de que las pruebas pueden ser desarrolladas de acuerdo a unas pocas reglas mecánicas. Los sistemas formales más extensivos construidos hasta el presente son el sistema de *Principia Mathematica* (PM), por un lado y, por el otro lado, el sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel para la teoría de conjuntos (con los desarrollos posteriores de J. v. Neumann). Estos dos sistemas son tan abarcadores que todos los métodos de demostración usados en la matemática de hoy en día pueden ser formalizados en ellos, es decir, pueden ser reducidos a unos pocos axiomas y reglas de inferencia. Es razonable por lo tanto hacer la conjetura de que estos axiomas y reglas de inferencia son también suficientes para decidir todas las preguntas matemáticas que pueden ser formalmente expresadas en estos sistemas.

Y a continuación adelanta la tesis principal de su teorema, que da por tierra con las esperanzas formalistas al anunciar que ese propósito es imposible:

> En lo que sigue mostraremos que *esto no es así*, sino que más bien, en ambos sistemas, *existen problemas relativamente simples de la teoría elemental de números naturales que no pueden ser decididos sobre la base de los axiomas.*

De esta manera, la situación entre lo verdadero y lo demostrable en el terreno de la aritmética elemental es análoga a la del crimen con dos sospechosos en el cuarto cerrado: cualquiera que sea el sistema axiomático (recursivo) propuesto, habrá enunciados que quedan fuera del alcance del método de demostración, enunciados que para el sistema son indecidibles, en el sentido de que no puede demostrarse ni su verdad ni su falsedad, ni su «inocencia» ni su «culpabilidad». Dicho de otro modo, la verdad no puede reducirse enteramente al plano sintáctico de lo demostrable. Si llamamos $T(\mathbf{N})$ al conjunto de todos los enunciados verdaderos en los números naturales, el teorema nos dice que no hay manera de elegir convenientemente una parte recursiva de $T(\mathbf{N})$ que pueda generar, vía demostraciones, el todo.

§ 5. El Teorema de Incompletitud

Hemos dicho que un conjunto de enunciados verdaderos seleccionados como axiomas es *completo* si pueden reobtenerse, vía demostraciones, como teoremas, todos los enunciados verdaderos del área o del objeto que nos proponemos axiomatizar.

Hay, sin embargo, una segunda definición de completitud que prescinde de la noción de verdad, y que es la que usó Gödel para enunciar su teorema. De acuerdo con esta definición un sistema axiomático es *completo* si todo enunciado es o bien demostrable, o bien *refutable* a partir de los axiomas del sistema (donde *refutable* significa que puede demostrarse su negación). Dicho de otro modo, un sistema axiomático es *incompleto* si hay algún enunciado que el sistema no puede ni demostrar ni refutar. Esta clase de enunciados que no pueden demostrarse ni refutarse dentro de un sistema se llaman *indecidibles* (para ese sistema).

Veremos en el capítulo 3 que si se eligen los axiomas dentro del conjunto de enunciados verdaderos, las dos definiciones son equivalentes. Con esta precisión podemos dar ahora la formulación quizá más conocida del Teorema de Incompletitud de Gödel, que incluye una contribución posterior de John Rosser.

> Teorema de Incompletitud (Gödel y Rosser):
> *Todo sistema axiomático consistente y recursivo para la aritmética tiene enunciados indecidibles. En particular; si los axiomas del sistema son enunciados verdaderos, puede exhibirse un enunciado verdadero y no demostrable dentro del sistema.*

§ 6. La prueba original de Gödel

La demostración original de Gödel, tal como él mismo señala (en «On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems», véase [Davis]), puede verse como una formulación matemática de la paradoja del mentiroso (llamada también paradoja de Epiménides). La paradoja suele expresarse con la frase «Yo miento», pero puede reformularse como:

«Esta afirmación mía es falsa».

Esta frase, que es en sí misma una afirmación, no es ni verdadera ni falsa. En efecto, si fuera verdadera, de acuerdo con lo que dice, sería falsa, y si fuera falsa, otra vez por lo que afirma, sería verdadera.

Los lógicos Bertrand Russell y Alfred Whitehead habían propuesto eludir esta clase de paradojas imponiendo la restricción de que los enunciados no pudieran referirse a sí mismos (esto es, que no pudieran afirmar nada de sí mismos). En el caso de la frase de Epiménides, la afirmación se refiere a sí misma, para decir de sí misma que es falsa.

Pero, tal como señala Gödel, esta restricción total de la autorreferencia es demasiado drástica, porque se puede establecer, con una sencilla idea matemática, una manera libre de paradojas en que los enunciados pueden expresar distintas propiedades de sí mismos.

Esto es justamente lo que hizo Gödel en su teorema fundamental: estableció una correspondencia entre enunciados del lenguaje y números naturales, de tal manera que a cada enunciado se le asigna un único número, que es su código de identidad. Conocido el número, puede saberse exactamente de qué enunciado proviene, de la misma manera que el número de documento permite identificar sin ambigüedad a cada persona. Ahora bien, al mirar los enunciados como números, Gödel logró expresar en el lenguaje de la aritmética, utilizando sólo las operaciones de suma y multiplicación, distintas propiedades sobre los enunciados como *relaciones aritméticas entre números*. En particular, probó que para cada conjunto recursivo de axiomas propuesto, el hecho de que un enunciado sea *demostrable* a partir de esos axiomas puede ser expresado con una fórmula en el lenguaje de la aritmética. Y, por lo tanto, también es expresable, con la negación de esta fórmula, el hecho de que un enunciado *no* sea demostrable. De esta manera logró construir y exhibir explícitamente un enunciado que dice de sí mismo, de manera análoga a la paradoja de Epiménides:

«Yo no soy demostrable».

Más aún, Gödel probó (desde fuera del sistema) que si todos los axiomas son enunciados verdaderos, su enunciado es también verdadero, y obtuvo así un enunciado *del que sabemos que es verdadero, pero que escapa al alcance de*

demostración del sistema de axiomas. En la demostración que daremos a partir del capítulo 5, se reproducirá esta parte del argumento para exhibir un enunciado con estas características.

§ 7. El Teorema de Consistencia

Dentro del mismo trabajo, Gödel mostró que también la propiedad de consistencia de un sistema axiomático recursivo para la aritmética es expresable en el lenguaje de la aritmética por un enunciado. Esto le permitió probar un segundo teorema sobre la consistencia, que es en sí mismo otra limitación al alcance de los métodos finitistas:

> Teorema de Consistencia:
> *El enunciado que expresa la consistencia de un sistema axiomático recursivo para la aritmética no es demostrable dentro de ese sistema.*

Una palabra de precaución: el Teorema de Consistencia no dice de ningún modo que los diversos sistemas axiomáticos para la aritmética propuestos históricamente hasta ahora sean inconsistentes, sino que la consistencia no es demostrable dentro del sistema.

Si bien tanto el Teorema de Incompletitud como el de Consistencia se refieren en principio únicamente a la aritmética, Gödel advirtió que estos resultados podían ser generalizados a cualquier sistema formal en que pudieran definirse los números naturales (donde *sistema formal* se entiende, en un sentido amplio, como un conjunto de símbolos con reglas finitistas que indiquen cómo emplearlos, y con la condición de recursividad que ya mencionamos para el conjunto de axiomas). En el artículo «On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems» [Davis] da cuenta en un *Postscriptum* de 1964 de los avances posteriores debidos a Alan Turing, y escribe:

> La existencia de proposiciones aritméticas indecidibles y la no demostrabilidad de la consistencia de un sistema dentro del mismo sistema, pueden ser ahora probados rigurosamente para *todo* sistema formal consistente que contenga una cierta cantidad de teoría de números finitista.

Pero a la vez, un párrafo más abajo, también se cuidó de precisar que las limitaciones de los sistemas formales reveladas por sus propios trabajos y los de Turing, «no establecen ningún límite para los poderes del razonamiento humano, sino más bien para las potencialidades del formalismo puro en matemática».

Antes de terminar esta sección dejamos enunciado aquí el Teorema de Gödel en esta forma más general:

TEOREMA DE GÖDEL (forma general):
Todo sistema axiomático recursivo y consistente que contenga suficiente aritmética tiene enunciados indecidibles. En particular; la consistencia del sistema no es demostrable dentro del sistema.

El significado preciso de «suficiente aritmética» (lo que Gödel llama «cierta cantidad de teoría de números finitista») quedará más claro en los capítulos próximos.

§ 8. EXTENSIÓN Y ALCANCE DEL TEOREMA DE GÖDEL. PRECAUCIONES

El fenómeno de incompletitud que describimos hasta aquí se verifica, tal como señala Gödel, no sólo en la aritmética elemental sino también en muchas otras teorías matemáticas, en particular, en todas aquellas en las que puedan definirse los números naturales con las operaciones de suma y multiplicación. En efecto, una vez reencontrados los números naturales con estas operaciones básicas, pueden reproducirse, dentro de estos sistemas, los argumentos de la demostración original. Sin embargo, a la vez, hay ejemplos también muy relevantes de teorías matemáticas que sí son completas. Por mencionar uno solo, si consideramos los *números complejos*, con las operaciones de suma y multiplicación, puede darse una axiomatización recursiva y completa del conjunto de todos los enunciados verdaderos. (Véase el Ejemplo 1.1 al final del capítulo). En el Apéndice I hay varios otros ejemplos de teorías que admiten axiomatizaciones recursivas y completas.

De manera que los dos fenómenos, tanto el de incompletitud como el de completitud, conviven en la matemática. Más aún, hay ejemplos de teorías en apariencia muy próximas entre sí que resultan una completa y la otra no. (Véase el Apéndice I, Ejemplo 11). Esto indica que se requiere cierta precaución epistemológica cuando se intenta extrapolar el resultado de Gödel fuera de la matemática. En realidad la argumentación de Gödel depende de una propiedad matemática muy sutil, muy específica. La demostración que daremos a partir del capítulo 5 trata de poner en evidencia esa propiedad, que hasta cierto punto divide aguas entre las teorías completas e incompletas. La explicamos aquí hasta donde podemos, sin tecnicismos:

En el lenguaje escrito las expresiones se unen, se yuxtaponen unas con otras para formar palabras. Por ejemplo, las expresiones «sal» y «as» se yuxtaponen para formar «salas» (o bien «assal»). Esa operación, que estudian los matemáticos, se llama *concatenación*. Lo que ocurre en los números naturales es que con el auxilio de la suma y la multiplicación se puede reflejar esta operación y «transcribir» el lenguaje

en términos de relaciones numéricas. Así, y en general, cuando el objeto matemático logra reflejar la concatenación del lenguaje y se pueden traducir ciertas afirmaciones del lenguaje en términos de relaciones y operaciones matemáticas, entonces se tiene el fenómeno de *incompletitud*. Si no, nada se puede asegurar en principio.

Todo esto indica que se debe tener mucho cuidado cuando se habla del Teorema de Gödel fuera del ámbito de la matemática, porque es muy posible que lo que se diga no tenga ningún sentido, más allá de lo metafórico. Discutiremos algunas de las extrapolaciones del Teorema de Gödel fuera del ámbito de la matemática en el capítulo 4. Por ahora sólo señalamos que si se pretende intentar alguna analogía con respecto al fenómeno de incompletitud debería darse un argumento adicional de por qué se elige en todo caso para la comparación la aritmética elemental (una teoría incompleta), y no cualquier otra de las muchas teorías matemáticas que sí admiten axiomatizaciones recursivas y completas.

§ 9. Gödel, las computadoras y la inteligencia artificial

El *mecanicismo* es la postura filosófica que sostiene que no existe una diferencia esencial entre una computadora y el cerebro humano y que el funcionamiento de la mente puede ser duplicado mediante procesos mecánicos.

Dice Panu Raatikainen en su artículo «La relevancia filosófica de los teoremas de Incompletitud de Gödel» ([Raatikainen], donde también están las referencias del párrafo): (las negritas son nuestras)

> Los teoremas de Gödel han alentado muchas especulaciones filosóficas por fuera de la filosofía de la matemática. En particular han sido repetidamente invocados en intentos de demostrar que **el poder de la mente humana supera cualquier mecanismo o sistema formal**. Un tal argumento gödeliano contra el mecanicismo fue ya considerado, sólo para refutarlo, por Turing en 1940.
>
> Una injustificada conclusión antimecanicista fue deducida de los teoremas de Incompletitud en la muy conocida exposición popular *El Teorema de Gödel*, de Nagel y Newman (1958). Poco después, J. R. Lucas (1968) afirmó que los teoremas de Incompletitud de Gödel «prueban que el mecanicismo es falso, esto es, que la mente no puede ser explicada por máquinas». Enunció que «dada cualquier máquina que es consistente y capaz de hacer aritmética simple, hay una fórmula que es incapaz de producir aunque es verdadera… pero de la cual podemos ver que es verdadera». Más recientemente afirmaciones muy similares fueron expuestas por Roger Penrose (en 1990 y 1994). Crispin

Wright (en 1994 y 1995) ha sostenido, desde un punto de vista intuitivo, ideas relacionadas. Todos ellos insisten en que los teoremas de Gödel implican que la mente humana supera infinitamente el poder de cualquier máquina finita. Estos argumentos gödelianos antimecanicistas son, sin embargo, erróneos. El error básico en todos estos argumentos es bastante simple de explicar. **El argumento supone que para cualquier sistema formalizado, o máquina finita, existe un enunciado de Gödel (que afirma de sí mismo que no es demostrable en el sistema) que es indemostrable, pero que la mente humana puede ver que es verdadero**. Pero el Teorema de Gödel tiene en realidad **una forma condicional** [la forma de una implicación] **y la pretendida verdad del enunciado de Gödel de un sistema depende de la suposición de la consistencia del sistema**. Esto es, todo lo que el Teorema de Gödel nos permite probar a los humanos con certeza matemática es que, dada una teoría formalizada F, vale:

Si F es consistente entonces G_F es verdadero.

Recordemos que el enunciado G_F afirma «Yo no soy demostrable en F». Si F es inconsistente, G_F es demostrable (porque, como veremos, en una teoría inconsistente *todo* enunciado es demostrable). Entonces G_F es falso.

El argumento antimecanicista **requiere entonces que la mente humana pueda también ver si la teoría formalizada en cuestión es, o no es, consistente**. Sin embargo esto es muy poco plausible. Después de todo recordemos que incluso distinguidos lógicos como Frege, Curry, Church, Quine, Rösser y Martin-Löf propusieron seriamente teorías matemáticas que luego resultaron ser inconsistentes. Como dice Martin Davis: «La intuición no ayuda». Lucas, Penrose y otros han intentado ciertamente responder a esta crítica pero permanece el hecho de que nunca han podido resolver el problema fundamental enunciado antes. A lo sumo han podido cambiar el tema de discusión. […]

§ 10. Derivaciones filosóficas

También hay que tener algún cuidado sobre las consecuencias filosóficas que pueden inferirse a partir de este resultado. Se ha escrito, por ejemplo, que el Teorema de Gödel representa un límite absoluto para el pensamiento lógico, o un golpe mortal a la razón clásica, o el fin de la certidumbre en el terreno de la matemática, etcétera. Sin embargo, el propio Gödel, y a pesar de haber meditado largamente sobre esto, fue

muy cauteloso respecto a las consecuencias filosóficas de su teorema. En 1951 fue invitado a dar la célebre conferencia Gibbs en la reunión anual de la American Mathematical Society, y el título de su disertación fue «Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas» [Gödel (2)]. En esa conferencia expuso, a través de una dicotomía, la opinión de que sus teoremas podían sustentar un punto de vista platonista, aunque era muy consciente de que esta clase de ideas no eran compartidas por los matemáticos de su época. Nunca se decidió a publicar este trabajo. Posteriormente, el lógico Solomon Feferman hizo una crítica detallada de esta exposición en [Feferman].

Es cierto que para los lógicos de principios del siglo pasado (y sobre todo para los logicistas como Bertrand Russell, Ernst Zermelo, o el propio David Hilbert) el Teorema de Gödel fue algo inesperado y, más aún, contrapuesto a la intuición «histórica» matemática, largamente entrenada a partir de Euclides, en los métodos axiomáticos. Pero, a la vez, el Teorema de Gödel no contradice ni impugna ninguno de los teoremas ya obtenidos de la matemática, sino que demuestra, más bien, la limitación de un método. Y de estos resultados sobre alcance y límites de métodos hay muchos en matemática, sólo que no se han puesto de moda en otros ámbitos ni han inspirado tantas lecturas dramáticas. En efecto, el Teorema de Gödel puede verse en una perspectiva similar a lo que fue el problema de la raíz de dos para los griegos. De la misma manera que el método de dividir enteros entre sí «no alcanza» para obtener la raíz cuadrada de dos, los métodos finitistas de demostración «no alcanzan» a probar toda la verdad en matemática. Sabemos, sin embargo, que para calcular la raíz de dos se han desarrollado históricamente otros métodos más sofisticados, que involucran la noción de límite matemático y de «aproximación progresiva». En particular, es muy fácil escribir el programa para una computadora que funciona indefinidamente y va arrojando todos los dígitos del valor exacto de la raíz de dos, un número que no conoceremos «escrito de una vez» en nuestra vida finita, pero que no por eso deja de tener una existencia matemática perfectamente aceptable y aceptada.

Y lejos de ser un golpe fatal a los procedimientos de la razón, la matemática avanza en todas las áreas sin preocuparse demasiado por el Teorema de Gödel. El Teorema de Gödel es visto antes como una curiosidad filosófica que como una preocupación práctica de la disciplina. Esto también es muy importante para tener en cuenta: no es que los matemáticos están detenidos en un limbo de indecisión desde que Gödel demostró este teorema. Si bien el fenómeno de incompletitud tiene gran importancia conceptual en algunas ramas vinculadas a la computación, a la topología, o a la teoría abstracta de modelos, y el Teorema de Gödel inauguró toda una nueva rama de la matemática vinculada al problema de la decisión, fuera de estos ámbitos el Teorema de Gödel es mirado como un exotismo de los lógicos por la gran mayoría de los matemáticos. ¿Por qué? Porque los matemáticos, en la práctica diaria, y sin ni siquiera reparar del todo en ello, utilizan teorías axiomáticas muy poderosas que «empujan» los posibles enunciados indecidibles a planos esotéricos, por fuera del

contenido matemático inmediato que atañe e interesa a cada teoría. Esto explica que, más allá de algunas excepciones notables (por ejemplo, el llamado *Halting Problem* en computación o el Teorema de Rice, véase [Davis, Sigal, Weyuker], o la vinculación de la indecidibilidad de la aritmética con la solución de ecuaciones diofánticas y el décimo problema de Hilbert, véase por ejemplo [Matijasevich] o [Davis, Matijasevich y Robinson]), no sea demasiado frecuente ni «natural» tropezarse en la práctica matemática con enunciados matemáticos indecidibles.

Al final del capítulo próximo haremos una discusión más exhaustiva de las tergiversaciones y errores más frecuentes en torno del Teorema de Gödel.

§ 11. Ejemplos y ejercicios

Ejercicio 1.1: Todo conjunto dado por una lista finita de axiomas es recursivo.

Resolución: Supongamos que el conjunto de axiomas tiene *m* axiomas. Cada axioma está escrito como una sucesión finita de símbolos. Tenemos así una lista de *m* axiomas

$$A_1$$
$$A_2$$
$$\dots$$
$$A_m$$

donde cada uno de estos axiomas está escrito con una cantidad finita de símbolos.

Dado ahora un enunciado E cualquiera, E también tiene una cantidad finita de símbolos. Chequeamos los símbolos de E uno a uno con los de A_1. Si hay más o menos símbolos, o no hay coincidencia perfecta, proseguimos el chequeo con los símbolos de A_2, y así sucesivamente hasta llegar al último, A_m. Dado que la lista tiene sólo una cantidad finita de axiomas, este proceso termina en una cantidad finita de pasos y nos permite decidir si el enunciado E es o no es uno de los axiomas de la lista.

Ejercicio 1.2: Consideremos la siguiente lista infinita de axiomas:

$$x + x = 0 \rightarrow x = 0$$
$$x + x + x = 0 \rightarrow x = 0$$
$$x + x + x + x = 0 \rightarrow x = 0$$
....
$$x + x + x + \dots + x = 0 \rightarrow x = 0$$

Mostrar que este conjunto infinito de axiomas es recursivo.

Resolución: Dado un enunciado E, si en E aparece algún símbolo distinto de «*x*», «+», «=», «→» o «0», o bien, si en E falta alguno de estos símbolos, diremos que E no pertenece al conjunto de axiomas. Si E tiene todos estos símbolos, nos fijamos en la longitud del enunciado E (la cantidad total de símbolos), y sólo debemos examinar si E coincide símbolo a símbolo con el axioma de la lista que tiene esa longitud. De manera que, a pesar de que la lista es infinita, podemos decidir en una cantidad finita de pasos si E es o no uno de los axiomas de la lista.

Ejercicio 1.3: Sea **N** el conjunto de los números naturales 1, 2, 3,… junto con las operaciones de suma y multiplicación. Sea *T*(**N**) el conjunto de todos los enunciados verdaderos en **N**. Entonces *T*(**N**) es un conjunto de axiomas completo.

(Este ejercicio muestra que es necesario, en el Teorema de Gödel, el requisito de que el conjunto de axiomas sea recursivo).

Resolución: Todo enunciado verdadero se obtiene a partir de los axiomas mediante una demostración que tiene un solo paso. En efecto, si E es verdadero, E es un axioma de *T*(**N**). Esto es lo que se llama la axiomatización trivial, en la que se eligen como axiomas *todos* los enunciados verdaderos.

El Teorema de Gödel nos dice, en particular, que *T*(**N**) no es un conjunto recursivo de axiomas. Y nos dice que tampoco es posible elegir una parte recursiva de *T*(**N**) que permita obtener como teoremas a todos los enunciados verdaderos.

Ejercicio 1.4: Consideremos un alfabeto de símbolos numerados S_1, S_2, S_3,… (puede ser finito o infinito, como los números naturales). Sea un conjunto recursivo de axiomas expresados con estos símbolos. Entonces todas las demostraciones pueden ser generadas mecánicamente por una computadora.

Resolución: Los enunciados, por ser sucesiones finitas de símbolos, pueden ordenarse con un orden similar al del diccionario. Suponemos entonces antes de empezar que los enunciados están efectivamente ordenados de este modo y que podemos referirnos al primer enunciado, al segundo enunciado, etcétera. Así, tenemos a los enunciados dispuestos en una primera fila infinita: E_1, E_2, E_3,…

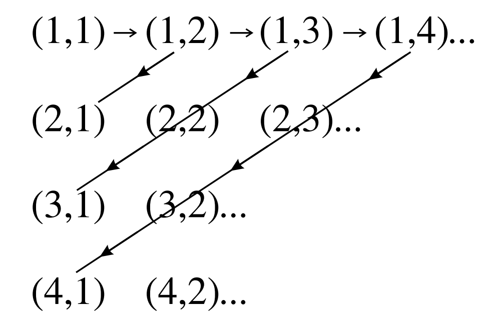
En una segunda fila, también infinita, queremos disponer las sucesiones que constan de *dos* enunciados. ¿Cómo hacemos esto? Utilizaremos lo que se conoce como el *método diagonal de Cantor*:

	E_1	E_2	E_3	···
E_1				
E_2				
E_3				
...				

La numeración de los pares de enunciados procede hacia la derecha y hacia abajo, y avanza por diagonales cada vez más largas, recorriendo progresivamente todas las filas y columnas del siguiente modo:

$$(E_1, E_1)\ (E_1, E_2)\ (E_2, E_1)\ (E_1, E_3)\ (E_2, E_2)\ (E_3, E_1)\ (E_1, E_4)\ldots$$

Si miramos sólo los subíndices tenemos el siguiente recorrido:



De una manera análoga (¡pensarlo!), también podemos ordenar en una sola fila las sucesiones de tres enunciados, y las sucesiones de cuatro enunciados, y, en general, la sucesiones de *n* enunciados, para todo *n*. Así, podemos ahora pensar en un gran cuadro en el que, en la primera fila, aparecen los enunciados ordenados, en la segunda fila las sucesiones de dos enunciados, en la tercera fila las sucesiones de tres enunciados, etcétera.

Primera fila: (enunciados)	___ ___ ___ ___ ___ …
Segunda fila: (sucesiones de dos enunciados)	___ ___ ___ ___ … ___ ___ ___ ___
Tercera fila: (sucesiones de tres enunciados)	___ ___ ___ … ___ ___ ___ ___ ___ ___
Cuarta fila: (sucesiones de cuatro enunciados)	___ ___ … ___ ___ ___ ___ ___ ___
…	…

La computadora realiza, otra vez, un recorrido diagonal, avanzando progresivamente hacia la derecha y hacia abajo, y verifica, para cada sucesión de enunciados, si la sucesión es o no una demostración. Cada una de estas verificaciones termina en una cantidad finita de pasos, lo que le permite seguir avanzando indefinidamente para recorrer todas las sucesiones finitas de enunciados e ir arrojando como *outputs* sólo aquellas sucesiones que sí son demostraciones. En particular, al verificar las sucesiones que constan de un solo enunciado, va arrojando una lista de los axiomas.

Ejercicio 1.5: Utilizar el método diagonal de Cantor para probar que el conjunto de todos los textos que pueden escribirse con un alfabeto numerable es un *conjunto también numerable*. (Recordar que un conjunto es *numerable si puede* ponerse en correspondencia uno a uno con los números naturales).

Este ejercicio permite concluir que todos los textos escritos y por escribir desde el inicio de la escritura hasta el fin de los tiempos, en cualquier idioma, no pueden sobrepasar el infinito de los números naturales. (Véase el Apéndice I, Ejemplo 5, sobre otros infinitos más grandes).

Resolución: Un alfabeto numerable será un conjunto de símbolos (las letras), que podemos notar S_1, S_2, S_3,…

Las palabras de dos letras se obtienen por concatenación de dos símbolos, es decir, escribiendo un símbolo a continuación del otro, y pueden listarse de este modo: S_1S_1, S_1S_2, S_2S_1, S_1S_3, S_2S_2, S_3S_1,…

Observemos que esto no es más que el listado que da el método diagonal de Cantor. Probamos así que el conjunto de palabras de dos letras es numerable. De la misma manera puede probarse que el conjunto de palabras de tres letras es numerable y en general el conjunto de palabras de *n* letras es numerable.

Disponemos una vez más un cuadro para aplicar el método diagonal de Cantor de esta manera:

En la primera fila escribimos las palabras de una letra.

En la segunda fila las palabras de dos letras.

En la tercera fila las palabras de tres letras.

Etcétera.

Este cuadro nos permite utilizar otra vez el método diagonal de Cantor para enumerar *todas* las palabras. De esta manera probamos que el conjunto de todas las palabras es numerable.

Ahora bien, ¿qué es un texto? Cada texto puede pensarse como una sucesión finita de palabras (con el añadido, dentro del alfabeto, de los signos de puntuación y el espacio, como «letras» auxiliares). De manera que, una vez más, disponemos un cuadro para aplicar el método diagonal de Cantor de esta manera:

- En la primera fila escribimos el conjunto numerable de todas las palabras (tal como lo obtuvimos del recorrido diagonal anterior).
- En la segunda fila escribimos el conjunto de todas las sucesiones de dos palabras.
- En la tercera fila escribimos el conjunto de todas las sucesiones de tres palabras.
- Etcétera.

Todos los textos posibles están en este cuadro, que es algo así como una biblioteca de Babel magnificada. Ahora utilizamos por última vez el recorrido diagonal y obtenemos una lista numerable de todos los texto. Esto prueba que el conjunto de todos los textos posibles a partir de un alfabeto numerable es también numerable

Ejemplo 1.1: *La teoría de primer orden de los números complejos.*

Recordemos que los *números complejos* pueden pensarse como expresiones del tipo $a + bi$, donde a y b son números reales, e i es la llamada *unidad imaginaria*, con la propiedad $i^2 = -1$.

La *suma* de dos números complejos está dada del siguiente modo:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

El *producto* de dos números complejos está dada del siguiente modo:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + be)i$$

Sea $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$ donde $+$ y $\cdot$ son símbolos de funciones binarias y 0 y 1 símbolos de constantes. Consideremos la siguiente lista de enunciados (donde el símbolo $\bigwedge$ significa «y», el símbolo $\bigvee$ significa «o» y el símbolo $\exists$ significa «existe»):

(1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociatividad)

(2) $x + 0 = x \bigwedge 0 + x = x$ (existencia de elemento neutro)

(3) $\exists y(x + y = 0 \bigwedge y + x = 0)$ (existencia de elemento inverso para +)

(4) $x + y = y + x$ (conmutatividad)

(5) $1 \cdot x = x \bigwedge x \cdot 1 = x$ (1 es una unidad para el producto)

(6) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociatividad de ·)

(7) $x \cdot y = y \cdot x$ (conmutatividad de ·)

(8) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ (distributividad de · sobre +)

(9) $x \cdot y = 0 \rightarrow (x = 0 \bigvee y = 0)$ (no hay divisores de 0)

(10) $x \neq 0 \rightarrow \exists y(y \cdot x = 1)$ (existencia de elemento inverso para ·)

(11_n) $n1 \neq 0$ (una lista infinita de axiomas: $1 \neq 0$; $1 + 1 \neq 0$; etc.)

(12_n) $\exists y(x_n \cdot y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \ldots + x_1 \cdot y + x_0 = 0) \bigvee x_n = 0$

(12_n) es en realidad también una lista infinita de axiomas, que expresa el hecho de que todo polinomio tiene raíz.

Ésta es una axiomatización recursiva y completa para los números complejos (véase [Chang y Keisler]).

¿Una paradoja?

Sabemos que los números naturales son un subconjunto de los números complejos y pueden obtenerse como 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, etcétera. Más aún, las operaciones de suma y producto que definimos más arriba, restringidas a este subconjunto, coinciden con la suma y el producto habitual de números naturales. ¿Contradice acaso esto lo que hemos dicho sobre la extensión del Teorema de Gödel y el fenómeno de incompletitud a los sistemas donde pueden definirse los números naturales con las operaciones de suma y producto?

En realidad no. Pero la explicación de este aparente dilema deberemos demorarla para más adelante, hasta el capítulo 3, porque requiere una explicación sutil sobre lo que significa «definir los números naturales».

Ejemplo 1.2: *Una demostración matemática: Irracionalidad de raíz de 2*

Damos aquí el ejemplo de una demostración típica, y que ha sido crucial en la historia de la matemática: la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2, es decir, el hecho de que la raíz cuadrada de 2 no puede obtenerse de dividir entre sí números enteros.

La demostración es «por el absurdo». Esto significa que supondremos, transitoriamente, que sí existen números enteros a y b tales que $\sqrt{2} = a/b$. Bajo esta hipótesis se desarrolla un razonamiento que conducirá a una contradicción (absurdo). El razonamiento es la siguiente cadena de afirmaciones:

Afirmación 1: (Hipótesis transitoria de absurdo). Existen números enteros a y b tales que $\sqrt{2} = a/b$.

Afirmación 2: Si $\sqrt{2} = a/b$, al elevar al cuadrado ambos miembros se mantiene la igualdad y obtenemos $2 = a^2/b^2$.

Afirmación 3: (*) $2b^2 = a^2$ (sigue inmediatamente de la *Afirmación 2* por las reglas del producto y la división).

Afirmación 4: Recordatorio de la escuela primaria. Los números *primos* son aquellos (mayores que 1) que se dividen sólo por sí mismos y por el 1 (como 2, 3, 5, 7, 11). Los números naturales (mayores que 1) se escriben de manera única como producto de los números primos que intervienen en su descomposición (llamada también factorización).

Afirmación 5: En el miembro de la derecha de la igualdad (*), los factores primos del número a^2 aparecen todos una cantidad par de veces. (En efecto, de la *Afirmación 4* se sigue de inmediato que los primos en la descomposición de a^2 son exactamente los de la descomposición de a, de manera que la cantidad de veces que aparece cada primo en la factorización de a se *duplica* con la elevación

al cuadrado, es decir, se multiplica por 2 y por lo tanto se convierte en un número par).

Afirmación 6: En particular el factor primo 2 aparece en la factorización de a^2 (sigue de la *Afirmación 4*, porque aparece en el miembro de la izquierda de la igualdad).

Afirmación 7: El factor primo 2 aparece una cantidad par de veces en el número a^2. (Sigue inmediatamente de las *afirmaciones 5* y *6*).

Afirmación 8: En $2b^2$ (el miembro de la izquierda en la igualdad (*)) el factor primo 2 aparece una cantidad *impar* de veces. En efecto, si el factor primo 2 aparece en el número b^2 lo hará, por las razones ya vistas, un número par de veces, y con el primer 2 que aparece como factor la cantidad total de veces se incrementa en uno y cambia la paridad, de modo que la cantidad total de veces que aparece el factor 2 en el miembro izquierdo será impar. (Si 2 no aparece en la factorización de b^2, la cantidad total de apariciones del factor 2 será 1, que también es impar).

Afirmación 9: (Contradicción) Un mismo número tiene dos factorizaciones en primos distintas, una en la que el factor 2 aparece una cantidad par de veces (a^2) (*Afirmación 7*) y otra en que aparece una cantidad impar de veces ($2b^2$) (*Afirmación 8*). Esto contradice la *Afirmación 4*.

Dado que los pasos del razonamiento son correctos, y cada una de las afirmaciones desde la segunda hasta la novena son verdaderas, la única falsedad posible en la cadena es la Afirmación 1, nuestra suposición transitoria original. Por lo tanto es falso que puedan encontrarse tales números enteros a y b y hemos probado la tesis: No pueden encontrarse números enteros a y b tales que $\sqrt{2}$ pueda obtenerse de dividir a por b.

CAPÍTULO DOS

HILBERT Y EL PROBLEMA DE LOS FUNDAMENTOS

El programa de Hilbert. Discusión: Qué dicen y qué no dicen los teoremas de Gödel. Ejemplos y ejercicios.

> —El nombre de la canción se llama «Ojos de bacalao» —dijo el Caballero Blanco.
> —Así que ése es el nombre de la canción, ¿no? —preguntó Alicia, que comenzaba a sentirse interesada.
> —No, veo que no me entiende. Así es como se llama el nombre. El nombre en realidad es «El hombre viejo viejo».
>
> LEWIS CARROLL
> *A través del espejo*

El Teorema de Incompletitud de Kurt Gödel del año 1931 se proponía, tal como observa el propio Gödel en las primeras líneas, cerrar una discusión que se desarrollaba en el terreno de los fundamentos de la matemática sobre la cuestión de los alcances de los métodos de demostración basados en axiomas y procedimientos mecánicos. Esta discusión se podría resumir en la siguiente pregunta: dada una demostración por procedimientos cualesquiera de una verdad matemática, ¿sería posible encontrar siempre una demostración alternativa de ese mismo hecho basada en enunciados «seguros», *finitistas*, esto es, en enunciados cuya verdad pudiera corroborarse en una cantidad finita de pasos? ¿Era la matemática, como creían Bertrand Russell y David Hilbert, enteramente reductible al lenguaje y a los sistemas formales, a esas sucesiones de líneas encadenadas por argumentos y reglas lógicas que llamamos demostración?

Para entender el origen y el verdadero sentido de esta discusión, debemos hacer una mínima mención histórica a la evolución del problema de los fundamentos. Ya en la segunda mitad del siglo XIX, a partir de los trabajos de Karl Weierstrass para esclarecer algunos conceptos relacionados con la noción de límite, se había despertado un interés por encontrar nociones básicas, elementales, que permitieran obtener todas las otras y regenerar el edificio de las matemáticas desde bases sólidas e indiscutibles. Una de las nociones propuestas, por su simplicidad, fue la de *conjunto*. En efecto, a partir de la noción intuitiva de conjunto, tal como se aprende en la escuela primaria, pueden definirse la mayor parte de los otros conceptos matemáticos: números, relaciones, funciones, etcétera. En 1902 el lógico alemán Gottlob Frege estaba por culminar un tratado definitivo sobre los fundamentos de la matemática basado en esta teoría intuitiva de conjuntos, cuando recibió una carta del joven Bertrand Russell (véase el Apéndice II), en la que exponía la famosa paradoja que le quitó, en dos líneas, todo el sustento a su trabajo: la noción intuitiva de conjunto era demasiado laxa y llevaba a contradicciones.

La Paradoja de Russell

Los conjuntos, por lo general, no son elementos de sí mismos: el conjunto de todos los números no es en sí mismo un número, el conjunto de todos los alumnos de una clase no es en sí mismo un alumno de la clase. Sin embargo, pueden concebirse conjuntos que son elementos de sí mismos: el conjunto de los conceptos es en sí mismo un concepto. El conjunto de todos los conjuntos es en sí mismo un conjunto. Así, puede concebirse también el conjunto **S** de los conjuntos que no son elementos de sí mismos.

S = {**X** tal que **X** no pertenece a **X**}

Ahora bien: ¿**S** pertenece a **S**?

Si **S** pertenece a **S**, es uno de los **X** que verifica la propiedad entre llaves, por lo tanto, **S** no pertenece a **S**.

Si **S** no pertenece a **S**, es uno de los **X** que verifica la propiedad entre llaves, por lo tanto **S** pertenece a **S**.

Tenemos así que tanto la pertenencia como la no pertenencia de **S** a sí mismo nos lleva a una contradicción.

Esta paradoja fue popularizada por el mismo Russell como la paradoja del barbero: un barbero de cierto pueblo afeita a todos los hombres que no se afeitan a sí mismos. ¿Debe el barbero afeitarse a sí mismo?

La Paradoja de Russell fue una verdadera conmoción en los fundamentos de la matemática. Por un lado mostraba que si se quería persistir en usar la noción de conjunto para basar la matemática, debían hacerse cuidadosas restricciones en la selección, y también en las formas de generar nuevos conjuntos a partir de conjuntos dados. Es decir, debía reemplazarse la noción intuitiva de conjunto por una serie de reglas de admisión, y, en lugar de todos los conjuntos imaginables, restringirse solamente a los que cumplieran estas reglas. Pero por otro lado, el descubrimiento de esta paradoja en un terreno en apariencia tan elemental, arrojaba también una sombra de incertidumbre sobre otros campos de la matemática. Si la manipulación de conjuntos había dado lugar a contradicciones, ¿cómo podía asegurarse que no ocurriría lo mismo, y que no habría otras paradojas al acecho, en la manipulación, por ejemplo, de los números que usamos para contar con las operaciones básicas de suma y multiplicación, es decir, la aritmética elemental, tal como la conocemos desde siempre?

El propio Bertrand Russell, en colaboración con Alfred Whitehead, y también otros matemáticos como Ernst Zermelo y Abraham Fraenkel, se propusieron entonces

la tarea de dar fundamento axiomático tanto a la teoría de conjuntos como a la aritmética, con el propósito de evitar la posible aparición de esta clase de contradicciones. Por su parte, David Hilbert y Paul Bernays desarrollaron una teoría general de la demostración basada en axiomas, dentro de un programa ambicioso para «eliminar de manera definitiva cualquier duda sobre la confiabilidad de la inferencia matemática» [Hilbert (1)]. La fundamentación a partir de axiomas tiene una larga y sólida tradición en la historia de la matemática y se remonta a los cinco postulados que dio Euclides para la geometría, cinco enunciados muy simples sobre puntos, rectas y paralelismo, a partir de los cuales se obtienen con demostraciones rigurosas, como teoremas, los demás enunciados de la geometría clásica (véase el Apéndice I, Ejemplo 1).

Hay, en el enfoque axiomático, una diferencia de punto de vista muy importante. La fundamentación que se había intentado a partir de conjuntos se refería todavía a objetos matemáticos con un significado tan familiar y establecido para los matemáticos como las nociones de número y función. En esta clase de fundamentación, se buscaban *objetos* que dieran lugar a todos los demás objetos. En el enfoque axiomático, en cambio, los objetos con su significado matemático peculiar se reemplazan por un *texto*, una lista de enunciados, una sucesión de condiciones a cumplir, un intento de *caracterización* desde el lenguaje. Vale la pena repetirlo: la búsqueda de objetos primitivos se reemplaza por la búsqueda de propiedades críticas de los objetos a estudiar que puedan expresarse por escrito (los axiomas) y a partir de las cuales se deduzcan como teoremas todas las demás propiedades y las relaciones entre sí de esos objetos. Se establece así una distinción entre un plano *semántico*, en que los objetos matemáticos tienen un significado preciso y particular, y un plano *sintáctico*, o *formal*, en que se proponen axiomas y demostraciones que den cuenta de las propiedades características de estos objetos.

Pero en esta transposición del plano semántico al plano sintáctico, los objetos bajo estudio pierden su especificidad y se vuelven genéricos: tal como escribió David Hilbert al analizar los axiomas de Euclides, podrían reemplazarse en cada postulado las nociones de «puntos, líneas y planos» por «mesas, sillas y jarros de cerveza» [Hilbert (2)]. Ya no importa la naturaleza de los objetos, sino sólo las relaciones y restricciones que se imponen entre sí, de la misma manera que en el juego de ajedrez la pieza del caballo queda definida, no por ningún rasgo particular del mundo equino, sino sólo por su forma de desplazarse en el tablero.

¿Cómo saber entonces si a través de los axiomas, en esta aproximación desde el lenguaje, estamos hablando todavía de los mismos objetos con todas sus propiedades? ¿Cómo saber si la descripción es *exhaustiva*, y si para cada propiedad que se verifica en un objeto se encontrará un correlato sintáctico bajo la forma de una demostración? Esto es lo que se llama el problema de la completitud.

Ahora bien, si en la aproximación a través de axiomas puede perderse en especificidad, hay algo también que se gana, y es la posibilidad de disponer de un

método de demostración que puede ser corroborado línea a línea, en una cantidad finita de pasos, tal como se repasa una suma de varias cantidades en el ticket del supermercado. Más aún, la idea fundamental que está detrás del método axiomático es que esta corroboración pueda hacerse de una manera mecánica, sin recurrir a la inteligencia. Es decir: que las demostraciones puedan someterse a la inspección de una computadora que, sin necesidad de *comprender* qué dice cada línea, o el significado del teorema que se quiere probar, puede verificar que se cumplen los requisitos lógicos que permiten pasar de una línea de la demostración a la siguiente, hasta llegar a la última, y que en este examen dictamina la corrección o incorrección de la prueba.

Para alcanzar este grado de precisión en las demostraciones, y llegar a un procedimiento absolutamente mecánico, que pueda implementarse en una computadora, debe explicitarse también, en forma sintáctica, como axiomas agregados, y como marco general de toda teoría, la *lógica* que se emplea en los razonamientos matemáticos. Esto incluye a los *axiomas puramente lógicos*, como el principio de tercero excluido (o bien vale una afirmación, o bien su negación es válida), y las reglas de deducción lógica, llamadas *reglas de inferencia*, que se emplean para pasar de una línea en la demostración a la siguiente. Un ejemplo típico es lo que se llama la regla de *modus ponens*: si en una línea está escrito un enunciado del tipo $A \to B$ y en alguna línea posterior aparece el enunciado A, la regla dice que puede escribirse a continuación, como una derivación lógica, el enunciado B.

Un resultado fundamental de la lógica, debido también a Gödel (su tesis doctoral, publicada como *La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden* en [Gödel (1)]), es que este marco lógico, común a todas las teorías, puede darse a través de una cantidad *finita* de axiomas lógicos y una cantidad también *finita* de reglas de inferencia. En el capítulo próximo veremos que el marco lógico puede darse en realidad con sólo diez axiomas lógicos y dos reglas de inferencia.

Recordemos, antes de seguir, que en matemática, en un sentido amplio, se llama *teoría* (o *sistema axiomático*) a un conjunto de afirmaciones (o enunciados) seleccionados como axiomas, junto con este marco lógico que guía los razonamientos. Una *demostración* a partir de una teoría es una lista (finita) de enunciados en la que cada enunciado es, o bien un axioma lógico, o bien un axioma de la teoría, o bien se obtiene de enunciados anteriores ya escritos en la lista por las reglas de inferencia. Un *teorema* de la teoría es un enunciado que admite una demostración a partir de los axiomas de la teoría.

Ahora bien, lo que está en el corazón del método axiomático es que las demostraciones pueden ser corroboradas en un número *finito* de pasos lógicos. El requisito adicional que debe tener el conjunto de axiomas propuesto para que las demostraciones realizadas a partir de esos axiomas sean efectivamente corroborables en una cantidad finita de pasos es la condición (R) de recursividad que ya adelantamos en el capítulo anterior:

(R) *Dado un enunciado cualquiera, puede determinarse, en una cantidad finita de pasos, si el enunciado pertenece o no al conjunto de axiomas.*

En efecto, vale la siguiente

Proposición: *Si un conjunto de axiomas es recursivo, toda demostración a partir de los axiomas es corroborable en una cantidad finita de pasos.*

Dejamos la demostración como un ejercicio al final del capítulo (Ejercicio 2.1).

Diremos entonces que una teoría (o conjunto de axiomas) es *recursiva* si cumple la condición (R). Por extensión, diremos también que una propiedad es recursiva si la verificación de esa propiedad puede realizarse por un procedimiento mecánico, en una cantidad finita de pasos. Por ejemplo, la propiedad «Ser un número primo» es recursiva, porque basta dividir el número dado por los números menores que él para detectar, en una cantidad finita de pasos, si hay divisores propios o bien si el único divisor es el uno.

Ya hemos visto en el capítulo anterior que toda teoría dada por un conjunto finito de axiomas (como los cinco postulados de Euclides) es recursiva, pero que también hay teorías con infinitos axiomas que son recursivas. En el Apéndice I pueden encontrarse varios otros ejemplos de teorías recursivas con infinitos axiomas.

El enfoque axiomático, sintáctico, plantea de inmediato el problema de hasta qué punto los axiomas propuestos logran realmente capturar a los objetos que nos proponemos estudiar con todas sus propiedades y relaciones. Si se detecta un enunciado que se cumple en el mundo de los objetos pero no puede demostrarse a partir del conjunto de axiomas, es claro que el conjunto de axiomas propuesto será insuficiente. Diremos que una teoría es *completa* si todo enunciado que se verifica en el mundo de los objetos puede ser demostrado como un teorema a partir de los axiomas de la teoría. Es decir, cada propiedad semántica, expresada por un enunciado, que se cumple en el mundo «real» de los objetos, tiene un correlato sintáctico, el texto de una demostración, y puede reobtenerse como un teorema a partir de los axiomas.

Hemos identificado hasta ahora tres condiciones «deseables» para una teoría o sistema axiomático. La primera, la más básica, y que está en el origen del programa formalista, es que el sistema no dé lugar a contradicciones. Diremos que una teoría o sistema axiomático es *consistente* si no puede demostrarse a partir de los axiomas una contradicción (un enunciado y su negación).

La segunda, que el sistema sea *recursivo*, es una condición de restricción, o sobriedad: nos interesa tener «pocos» axiomas, reconocibles, bien determinados, que puedan presentarse fehacientemente, para garantizar la corroboración de las demostraciones de una manera mecánica y en una cantidad finita de pasos. La tercera, que el sistema sea *completo*, es una condición de acopio: los axiomas deben ser

«bastantes» para garantizar la completitud. Se establece entonces un problema de balance entre estos dos últimos requisitos que se contrapesan entre sí: los «pocos» axiomas deben ser a la vez «bastantes».

§ 1. El programa de Hilbert

La preocupación fundamental que da origen al programa de David Hilbert es la cuestión de cómo manipular con reglas lógicas los conjuntos infinitos pensados como totalidades acabadas, por ejemplo, la totalidad de los números naturales, o la totalidad de los puntos de un segmento. Esto es lo que se llama el infinito *actual*, en contraposición con el infinito *potencial*, que se corresponde con la idea de un conjunto que puede ampliarse tanto como se quiera (para cada número n puede encontrarse uno mayor, para cada punto a cierta distancia puede encontrarse otro más lejano), pero que no se presenta «todo a la vez». Hilbert advierte que los mismos riesgos y problemas que habían aparecido en el campo del análisis al considerar sumas y productos infinitos podían surgir en las demostraciones al utilizar los conceptos «para todo» y «existe», aplicados a totalidades infinitas, si no se tomaban precauciones para no traspasar la esfera de lo intuitivo y lo finito.

En efecto, para totalidades finitas, la afirmación de que todos los objetos poseen una cierta propiedad es equivalente a la conjunción de varios enunciados particulares por medio de la palabra «y». Afirmar que todos los alumnos de una fila tienen guardapolvo equivale a decir: el primero de la fila tiene guardapolvo y el segundo de la fila tiene guardapolvo y… y el último de la fila tiene guardapolvo. De manera análoga la afirmación de que en una totalidad finita existe un objeto con una cierta propiedad es equivalente a una composición de enunciados particulares por medio de la palabra «o». Así, para totalidades o conjuntos finitos vale el principio del tercero excluido: o bien todos los objetos poseen una cierta propiedad, o bien existe entre ellos uno que no la posee. Para totalidades finitas valen también las siguientes equivalencias (donde ∀ es el símbolo matemático que abrevia «Para todo», ∃ es el símbolo que abrevia «Existe» y ¬ es el símbolo de negación de un enunciado):

$$\neg\forall x \mathrm{A}(x) \text{ equivale a } \exists x \neg \mathrm{A}(x)$$

$$\neg\exists x \mathrm{A}(x) \text{ equivale a } \forall x \neg \mathrm{A}(x)$$

En la práctica matemática es usual suponer, sin más, la validez de estas equivalencias, también cuando se habla de totalidades infinitas, pero en el terreno de las demostraciones se corre el peligro de deslizar inferencias transfinitas, y abrir la puerta a posibles errores.

Al considerar una infinidad de objetos, observa Hilbert, ni la negación del juicio general $\forall x \mathrm{A}(x)$, ni la negación del juicio existencial $\exists x \mathrm{A}(x)$ tienen, en principio, un

contenido preciso, porque involucran conjunciones lógicas, o disyunciones lógicas, infinitas. Más aún, si la afirmación $\forall x\mathrm{A}(x)$ no es válida, no siempre esto nos permite probar que hay un objeto con la propiedad $\neg$A. En la demostración del Teorema de Gödel veremos, por ejemplo, que puede exhibirse una fórmula de la aritmética $E(x)$ tal que $E(\mathbf{1})$ es demostrable y $E(\mathbf{2})$ es demostrable y… y $E(\mathbf{n})$ es demostrable cualquiera que sea **n**, pero sin embargo el enunciado $\forall xE(x)$ no es demostrable.

Es decir, no vale en general la inferencia transfinita (la inferencia a partir de una lista infinita de premisas): a diferencia de lo que ocurre con la definición de verdad, en que decimos que $\forall xE(x)$ es verdadero si y sólo si son verdaderos todos los enunciados $E(\mathbf{1})$, $E(\mathbf{2})$, …, $E(\mathbf{n})$,… dar demostraciones para $E(\mathbf{1})$ y para $E(\mathbf{2})$ y… para $E(\mathbf{n})$ cualquiera que sea **n**, no permite inferir que habrá también una demostración para el enunciado $\forall xE(x)$. (Véase el Ejemplo 2.1 al final del capítulo). Tampoco vale sin más que o bien $\forall x\mathrm{A}(x)$ es válido o bien $\exists x\neg\mathrm{A}(x)$ es válido.

Lo que se propone Hilbert es «indagar por qué y en qué medida la aplicación de modos de inferencia transfinitos tal como éstos se presentan en el análisis y en la teoría de conjuntos nos permite obtener resultados correctos». Y su plan, para una teoría de la demostración «segura», es reducir las inferencias transfinitas a enunciados finitistas. «El manejo libre de lo transfinito y su entero dominio y control» sostiene, «debe tener lugar a partir de lo finito». (Todas las citas de esta sección, salvo indicación diferente, están tomadas del artículo «Acerca del infinito» [Hilbert (1)].)

Hilbert propone diferenciar entre enunciados «con sentido», o finitistas, cuya verdad o falsedad pueden determinarse en una cantidad finita de pasos y que tienen una evidencia intuitiva concreta, y enunciados «ideales» que, aunque no tengan un contenido intuitivo preciso, pueden agregarse siempre y cuando no den lugar a inconsistencias en las teorías.

> En la teoría de la demostración, a los axiomas finitos se añaden los axiomas y las fórmulas transfinitas, de manera análoga a como en la teoría de los números complejos a los elementos reales se añaden los imaginarios. La extensión por medio del agregado de ideales es lícita y permisible solamente cuando con ello no se provoca el surgimiento de contradicciones.

Esto lo lleva naturalmente a plantearse la cuestión de la consistencia.

> La elección, la interpretación y la manipulación de los axiomas no pueden estar basadas simplemente en la buena fe y en lo que nuestras creencias nos indiquen. Tanto en la geometría como en la física es posible dar pruebas de consistencia relativa. Esto es, de reducir el problema de la consistencia en esas esferas a la consistencia de los

> axiomas de la aritmética. Pero es evidente que no tiene sentido buscar una demostración de ese tipo [consistencia relativa] para la aritmética misma. En la medida en que nuestra teoría de la demostración, basada en el método de los elementos ideales, hace posible este último y decisivo paso, constituye una especie de punto final necesario en la construcción del edificio de la teoría axiomática. Y lo que ya hemos tenido que padecer en dos ocasiones, primero con las paradojas del cálculo infinitesimal y luego con las paradojas de la teoría de conjuntos, no podrá pasarnos una tercera vez, no volverá a pasar nunca.

Lo que se proponía Hilbert, en definitiva, era recuperar toda la matemática y en particular la teoría de conjuntos infinitos de Cantor («nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros») a partir de su teoría de la demostración, y reobtener, para cada demostración obtenida con métodos cualesquiera de la práctica matemática usual, una demostración rigurosa y «segura» que utilizara sólo inferencias finitas. Como culminación de este proyecto, planeaba una demostración por estos métodos «seguros» de la consistencia de la aritmética.

Vale la pena aquí insistir sobre un punto, que es el que da origen al programa formalista y el que está en el fondo de la discusión filosófica que se libró por décadas en el terreno de los fundamentos de la matemática: los sistemas axiomáticos se propusieron como una manera de librar a la matemática de la aparición de paradojas y contradicciones. Pero el desafío para estos sistemas era mostrar que tenían la misma potencia, el mismo alcance, y podían recuperar, sobre nuevas bases, toda la matemática hecha anteriormente. Es decir, se trata de un problema *sobre los alcances de los métodos formales de demostración*.

Muchas veces en su historia, la matemática se enfrentó a la insuficiencia (relativa) de sus propios métodos. Ya hemos mencionado que la dificultad de los antiguos griegos para calcular la raíz cuadrada de dos puede verse como la limitación del método de dividir números enteros entre sí. Y que fue esta insuficiencia lo que dio lugar a un concepto más amplio de número y a nuevos métodos para estimarlos y definirlos.

De la misma manera, durante mucho tiempo se pensó que las ecuaciones de polinomios en una variable de grado cinco podían resolverse utilizando raíces (tal como se había hecho para los polinomios de grado dos, tres y cuatro). Sin embargo, el método de expresar la solución con raíces probó ser insuficiente para los polinomios de grado mayor o igual que cinco.

El propio Hilbert se refiere a esta clase de limitaciones en su célebre conferencia de 1900:

> En las matemáticas posteriores, la cuestión de la imposibilidad de ciertas soluciones desempeña una parte destacada; y de este modo

> percibimos que problemas viejos y difíciles, tales como la demostración del axioma de las paralelas, la cuadratura del círculo, o la solución por radicales de las ecuaciones de quinto grado, han encontrado al fin soluciones plenamente satisfactorias y rigurosas, aunque en un sentido diferente del originariamente pretendido. Probablemente es este hecho notable, junto con otras razones filosóficas, lo que da lugar a la convicción (que comparten todos los matemáticos, pero que nadie ha sustentado todavía con una demostración) en que todo problema matemático definido debe ser necesariamente susceptible de un acuerdo exacto, ya sea en forma de una respuesta real a la cuestión preguntada, ya sea por la demostración de la imposibilidad de su solución y con ello el fracaso necesario de todos los intentos. Tomemos cualquier problema definido no resuelto, tal como la irracionalidad de la constante C de Euler-Mascheroni o la existencia de un número infinito de números primos de la forma $2^n + 1$. Por inabordables que estos problemas nos puedan parecer, y por impotentes que nos sintamos ante ellos, tenemos de todas formas la firme convicción de que sus soluciones deben seguirse por un número finito de procesos puramente lógicos.

Quizá lo más curioso de este párrafo es la frase final, en la que Hilbert no parece contemplar que estas mismas limitaciones e imposibilidades pueden alcanzar a los métodos formalizados y a su teoría de la demostración.

Y fue en el mismo terreno de la aritmética, donde todavía en 1930 Hilbert se afanaba por encontrar su propio sistema axiomático, que el Teorema de Incompletitud de Gödel marcó el principio del fin para su programa.

> TEOREMA DE GÖDEL (forma general):
> *Todo sistema axiomático recursivo y consistente que contenga suficiente aritmética tiene enunciados indecidibles. En particular; la consistencia del sistema no es demostrable dentro del sistema.*

La condición de que el sistema contenga «suficiente aritmética» significa, esencialmente, que puedan demostrarse a partir de los axiomas todos los enunciados de la aritmética finitista, los enunciados «con sentido», a los que se refería Hilbert, es decir, los enunciados cuya verdad o falsedad puede determinarse en una cantidad finita de pasos.

De esta manera el Teorema de Gödel destruye una por una todas las esperanzas de Hilbert: en primer lugar muestra que hay enunciados de la aritmética cuya validez no puede decidirse sobre la base de los enunciados finitistas. Aún peor, uno de los enunciados no demostrables dentro del sistema es justamente la propiedad de consistencia, lo que liquida también el plan de Hilbert de dar una fundamentación

general a la matemática a partir de la aritmética. Como una última ironía, la demostración dada por Gödel para su teorema sí es perfectamente finitista, «segura», y cumple todos los requisitos formales.

Considero la sección más importante para el estudio exhaustivo de los 2 teoremas (1931)

§ 2. Discusión: Qué dicen y qué no dicen los teoremas de Gödel

¿Qué dicen y qué no dicen los teoremas de Gödel? Nos proponemos aquí revisar algunos de los malentendidos más frecuentes en relación con el enunciado y los alcances de los teoremas de Incompletitud y Consistencia.

1. *El Teorema de Gödel establece un límite a las pretensiones de la razón humana.*

Falso. Ya hemos dicho que el propio Gödel afirmó que tanto su teorema como los resultados de Turing, «no establecen ningún límite para los poderes del razonamiento humano, sino más bien para las potencialidades del formalismo puro en matemática».

Por supuesto, tampoco debe entenderse la frase de Gödel en el sentido opuesto, como una presunción de que el pensamiento humano sea ilimitado. Los poderes del razonamiento humano seguramente son limitados, pero *no debería alegarse el Teorema de Gödel como evidencia de esas limitaciones*. ¿Por qué? Porque los sistemas formales a los que alcanza el Teorema de Gödel no son una modelación del razonamiento humano (e incluso es discutible que sean una modelación exhaustiva del razonamiento matemático en toda posible complejidad (véase, por ejemplo [Feferman]), *sino sólo de la parte de los razonamientos lógico-matemáticos que pueden modelarse en una computadora clásica*.

2. *El Teorema de Gödel dice que ninguna verdad puede ser establecida de forma definitiva.*

Falso. Más aún, en la demostración de Gödel se exhibe un enunciado del que se sabe (y puede probarse por fuera del sistema) que es verdadero, pero queda fuera del alcance de las demostraciones del sistema axiomático. Es decir, el Teorema de Gödel no es un teorema acerca de la verdad sino sobre la insuficiencia de los métodos axiomáticos para regenerar, vía demostraciones, la totalidad de los enunciados verdaderos. En este sentido recordamos la analogía del capítulo anterior con el crimen del cuarto cerrado y las limitaciones de los métodos de la justicia.

3. *El Teorema de Gödel dice que no hay certidumbre total ni siquiera en el dominio de la matemática.*

Falso. El Teorema de Gödel no pone en tela de juicio ninguno de los resultados matemáticos ya establecidos, sino que revela la limitación de los métodos finitistas de comprobación de esos resultados. En particular, dentro de las certidumbres de la matemática, se tiene la certidumbre total de que dos más dos es cuatro y de que el Teorema de Gödel es cierto.

4. *El Teorema de Consistencia de Gödel dice que ninguna teoría es consistente.*

Falso. El Teorema de Consistencia de Gödel sólo afirma que la consistencia de una teoría recursiva (con suficiente aritmética) no puede ser demostrada dentro de esa misma teoría. En particular, el mismo Gödel probó la consistencia, por ejemplo, del cálculo de predicados.

5. *El Teorema de Gödel dice que ninguna teoría puede ser a la vez consistente y completa.*

Falso. El cálculo de predicados, el cálculo proposicional y las teorías de modelos finitos son todas teorías consistentes y completas. El Teorema de Gödel dice que si una teoría *contiene suficiente aritmética*, no puede ser a la vez consistente y completa. La condición de «suficiente aritmética» significa, esencialmente, que puedan probarse dentro de la teoría todos los enunciados finitistas verdaderos de la aritmética.

6. *El Teorema de Gödel dice que toda teoría para la aritmética es incompleta.*

Falso. Es crucial el requisito de que la teoría sea recursiva. El conjunto $T(\mathbf{N})$ de todos los enunciados verdaderos en **N** es, trivialmente, una axiomatización completa. (Véanse el capítulo 1, Completitud y Axiomas, y el Ejercicio 1.3).

7. *El Teorema de Gödel dice que toda teoría recursiva es incompleta.*

Falso. La generalización del Teorema de Gödel habla de teorías recursivas *en las que pueda definirse la aritmética*, lo que permite reproducir el argumento de la prueba de incompletitud. Pero a la vez, hay una multitud de teorías matemáticas recursivas y completas para distintos objetos matemáticos. Incluso para estructuras que tienen también números y operaciones de suma y multiplicación, como los números complejos (véase el Ejemplo 1.1).

Esto debería hacer extremar el cuidado con las analogías fuera del ámbito de la matemática. ¿Por qué invocar el Teorema de Incompletitud de la aritmética y no, por

ejemplo, el Teorema de Completitud para los números complejos?

Es decir, quien se proponga usar como analogía el Teorema de Gödel fuera del ámbito de la matemática, debería ser capaz de precisar cuál es la distinción que le hace preferir la aritmética en la analogía en vez de estos otros objetos matemáticos que admiten axiomatizaciones recursivas y completas.

8. El Teorema de Gödel no tiene ninguna incidencia en la matemática.

Esta afirmación es el reverso opuesto de las afirmaciones tremendistas sobre los supuestos efectos devastadores del teorema, y también es parcialmente falsa. Si bien el Teorema de Gödel no ha alterado mucho la práctica y los métodos de razonamiento usuales de los matemáticos, dio impulso a toda una rama de la matemática relacionada con los alcances de los métodos computacionales. En particular, una reformulación del teorema, debida al matemático Yuri Matijasevich, dio también la solución (negativa) de uno de los problemas propuestos por Hilbert en su conferencia de 1900, al revelar que no existe algoritmo para saber si una ecuación diofántica en varias variables tiene solución (véase [Matijasevich]).

El Teorema de Gödel inauguró también toda una rama de la matemática alrededor de los métodos de decisión y la prueba de Gödel ha incorporado una idea importante que se ha utilizado en una multitud de trabajos: la utilización de la autorreferencia a través de la codificación de enunciados.

§ 3. Ejemplos y ejercicios

Ejercicio 2.1: Probar la siguiente proposición:

> **Proposición:** *Si un conjunto de axiomas es recursivo, toda demostración a partir de los axiomas es corroborable en una cantidad finita de pasos.*

Demostración: Imaginemos que nos dan una lista de enunciados E_1, E_2, …, E_n y nos proponen el problema de corroborar si esta lista es verdaderamente una demostración. De acuerdo con la definición que hemos dado de demostración, esto requiere que hagamos una comprobación enunciado por enunciado. Deberíamos entonces mirar el primer enunciado E_1 y determinar, en una cantidad finita de pasos, si es o no un axioma (ya sea un axioma lógico o un axioma de la teoría propuesta). Dado que la cantidad de axiomas lógicos es finita, y cada uno de estos axiomas está escrito con una cantidad finita de símbolos, basta comparar al enunciado E_1 símbolo a símbolo con cada uno de estos axiomas lógicos para comprobar en una cantidad finita de pasos si es o no uno de ellos. Es decir, esta parte es en realidad el Ejercicio 1.1 y no

representa un problema. (Observemos además aquí que la comprobación es puramente sintáctica, símbolo a símbolo, y por eso puede ser realizada de manera mecánica).

Supongamos ahora que E_1 no fuera un axioma lógico. Es aquí donde utilizamos la condición (R) para verificar en una cantidad finita de pasos si E_1 es o no uno de los axiomas de la teoría.

A continuación examinamos cada uno de los enunciados siguientes E_i: en el caso de que E_i no fuera un axioma, deben verificarse todas las posibles combinaciones por aplicación de alguna de las reglas de inferencia a los enunciados anteriores a E_i en la sucesión, para determinar si alguna de estas combinaciones da lugar al enunciado E_i. Dado que la cantidad de enunciados anteriores a E_i es finita y también hay en el marco lógico sólo una cantidad finita de reglas de inferencia, el número de estas posibles combinaciones es también finito. Tenemos así que la comprobación enunciado por enunciado puede realizarse en una cantidad finita de pasos, y por lo tanto, como la sucesión a verificar tiene una cantidad finita de enunciados, todo el proceso termina también en una cantidad finita de pasos. ■

Ejemplo 2.1: El recorrido diagonal de Cantor, que explicamos en el Ejercicio 1.4, nos permite numerar todas las demostraciones a partir de un conjunto recursivo de axiomas, de tal manera que, dado un número cualquiera, podemos mirarlo como la sucesión de enunciados de una cierta demostración. En efecto, a la primera sucesión de enunciados que la computadora reconoce como una demostración, le asignamos el número 1, a la segunda sucesión que reconoce como demostración, le asignamos el número 2, etcétera.

Consideremos ahora el enunciado de Gödel que anticipamos en el capítulo anterior: «Yo no soy demostrable». Llamemos **G** a este enunciado. Hemos dicho que Gödel probó en su teorema (y nosotros también daremos la prueba más adelante) que este enunciado no es demostrable. A su vez, dado que tenemos numeradas todas las posibles demostraciones, **G** es equivalente a decir «Para todo x, x no es el número de una demostración de **G**». Llamemos ahora $H(x)$ a la fórmula «x no es el número de una demostración de **G**». Como **G** no es demostrable, el enunciado $\forall x H(x)$ tampoco es demostrable.

Sin embargo $H(\mathbf{1})$, $H(\mathbf{2})$, …, $H(\mathbf{n})$,… son todos enunciados finitistas y *verdaderos*. En efecto, para cada número natural **n**, miramos la demostración que le corresponde a **n** y corroboramos, en una cantidad finita de pasos, que **G** no es el enunciado final de esa demostración. De esta manera, hemos obtenido una fórmula $H(x)$ tal que $H(\mathbf{1})$, $H(\mathbf{2})$, …, $H(\mathbf{n})$,… son todos enunciados demostrables y sin embargo $\forall x H(x)$ no es demostrable.

Este ejemplo muestra, justamente, la clase de limitación que tiene la inferencia sintáctica. Aun cuando se conoce una demostración particular para cada caso en

particular, no puede darse una demostración para el caso general. Por otro lado, el ejemplo muestra también el riesgo de la inferencia transfinita. En el plano semántico, el enunciado $\forall x H(x)$ es verdadero si y sólo si son verdaderos $H(\mathbf{1})$, $H(\mathbf{2})$, …, $H(\mathbf{n})$,… Pero en el plano sintáctico, como hemos visto, extender esta equivalencia «vía inferencia transfinita» a lo demostrable nos llevaría, como advirtió Hilbert, a errores.

CAPÍTULO TRES

EL LENGUAJE PARA LA ARITMÉTICA Y LA DEFINICIÓN DE VERDAD

El lenguaje formal. Los enunciados. Los axiomas y reglas de inferencia de la lógica de primer orden. Demostraciones y teorías. La verdad en matemática: una definición formal. Completitud y consistencia en nuestra teoría formal. La solución de un dilema. Ejercicios.

> Mefistófeles. —Aproveche el tiempo, ¡pasa tan pronto!… Pero el método le enseñará a ganarlo. Para ello, querido amigo, le aconsejo ante todo el Collegium Logicum. Allí se adiestrará bien su espíritu, aprisionado en borceguíes españoles…
>
> GOETHE
> *Fausto*

En este capítulo nos proponemos volver a las nociones fundamentales que expusimos en los capítulos anteriores, para darles una formulación más precisa en el lenguaje de las matemáticas que nos permita escribir el enunciado exacto del Teorema de Gödel. La primera noción que examinaremos (¡otra vez!) es la de *demostración*.

Al mirar una demostración cualquiera en matemática —como la que dimos en el Ejemplo 1.2— podemos ver que hay en ella afirmaciones de naturaleza matemática específica (por ejemplo, que todo número natural mayor que 1 se puede escribir como producto de números primos), y otras que resultan de consideraciones lógicas generales y que son independientes del contenido matemático en particular (por ejemplo, que una afirmación y su negación no pueden ser simultáneamente verdaderas). A la vez, ya hemos explicado que nos interesan las demostraciones cuya corrección pueda corroborarse de una manera mecánica, en una cantidad finita de pasos.

Dado que una demostración es una lista finita de afirmaciones, corroborar una demostración es verificar una por una todas las afirmaciones de la lista y el modo en que unas se deducen de las otras. Si se quiere un procedimiento mecánico para esta corroboración, es claro que uno de los requisitos necesarios es que el procedimiento pueda reconocer las expresiones que aparecen en la lista de una manera puramente sintáctica, leyéndolas símbolo a símbolo, para compararlas entre sí, de la misma manera que un procesador de texto verifica la ortografía de lo que hemos escrito, por comparación letra a letra de las palabras con un diccionario que tiene cargado en la memoria.

Esto requerirá la introducción para la aritmética de un lenguaje formal sin las ambigüedades del habla corriente, con símbolos bien determinados, de manera que cada afirmación quede escrita de una manera precisa y pueda ser chequeada por una computadora como una sucesión ordenada de símbolos. Más precisamente, el lenguaje formal deberá cumplir los siguientes requisitos:

1. *Establecer una definición precisa de la noción de afirmación (o enunciado,) de manera que, dada una secuencia cualquiera de símbolos, una computadora sea capaz de decidir, en una cantidad finita de pasos, si esa secuencia constituye o no una afirmación.*

Una *afirmación* o un *enunciado* es una expresión de la que puede decirse si es verdadera o si es falsa. Por ejemplo, «dos más dos es cinco» es un enunciado (falso, en este caso), pero «lobo la cubo red», en cambio, no es un enunciado. Esta definición, sin embargo, apela a la noción semántica de *verdad* (es decir, depende del significado de la expresión).

El requisito que estamos pidiendo es que exista una definición *sintáctica* de la noción de enunciado, una definición que dependa exclusivamente de los símbolos que forman la expresión, sin apelar a ninguna interpretación particular de estos símbolos (adviértase aquí la dificultad de este problema).

2. *El lenguaje formal debe contener una cantidad suficiente de símbolos lógicos como para poder expresar todas las combinaciones lógicas usuales.*

Es decir, debemos ser capaces de expresar la negación de una afirmación (la negación de «*2 es par*» es «*2* **no** *es par*»), la conjunción de dos o más afirmaciones («*2 es un número par* **y** *3 es un número primo*»), así como la disyunción («*2 es un número par* **o** *3 es un número primo*») y también la implicación («*Si 3 es un número primo* **entonces** *3 es un número impar*»).

El lenguaje además debe tener símbolos para los *cuantificadores lógicos*, que corresponden al «Para todo elemento vale que» (por ejemplo «**Todo** número par es divisible por 2») o «Existe un elemento tal que» (por ejemplo «**Existe** un número primo que es par»).

3. *El lenguaje formal debe contener también símbolos matemáticos para las operaciones usuales de la aritmética (la suma, la multiplicación).*

Dado que estamos proponiendo un lenguaje para la aritmética la necesidad de este último requisito es evidente.

§ 1. El lenguaje formal

Las distintas operaciones lógicas pueden expresarse con los símbolos que detallamos a continuación, y que incluimos en nuestro lenguaje formal:

$\forall$: es el *cuantificador universal* y significa «**Para todo**».

$\exists$: es el *cuantificador existencial* y significa «**Existe algún**».

$\to$: es la *implicación*; $P \to Q$ significa «**Si** P **entonces** Q».

$\bigvee$: es la *disyunción*, $P \bigvee Q$ significa «P **o** Q».

$\bigwedge$: es la *conjunción*, $P \bigwedge Q$ significa «P **y** Q».

$\neg$: es la *negación*, $\neg P$ significa «**no** P».

Incluimos también en el lenguaje formal los paréntesis a modo de signos de puntuación. En realidad, en el lenguaje formal sólo usaremos los símbolos $\forall$, $\to$, $\neg$, ya que a partir de ellos es posible expresar cualquiera de las otras tres operaciones lógicas. En efecto:

$$P \bigwedge Q \text{ equivale a } \neg(P \to \neg Q);$$
$$P \bigvee Q \text{ equivale a } \neg P \to Q;$$
$$\exists x P \text{ equivale a } \neg \forall x \neg P.$$

La aritmética trata de los números *naturales* (que son los que usamos para contar: 0, 1, 2, 3, 4,…), con las operaciones básicas de suma y multiplicación tal como se enseñan en el colegio primario. Algunas afirmaciones, o enunciados, típicos de la aritmética son:

Dos más dos es cuatro.

La suma de dos números pares es un número par.

Todo número mayor que uno es divisible por algún número primo.

Sabemos también que los números naturales pueden obtenerse a partir del 0 contando de uno en uno. En otras palabras, el conjunto de los números naturales está formado por el cero, el siguiente del cero, el siguiente del siguiente del cero, etcétera.

Para poder expresar formalmente esta idea nuestro lenguaje contendrá entonces al número 0 y también a la letra S, que representará a la función que a cada número n le asigna su siguiente $n + 1$. De esta forma la secuencia de todos los números naturales se escribirá en el lenguaje formal como 0, S0, SS0,…

A las expresiones 0, S0, SS0,… las llamaremos *numerales* y serán entonces los *nombres* de los números en el lenguaje formal. Así, S0 es el nombre del número 1, SS0 es el nombre del número 2, etc. Notemos otra vez aquí la diferencia entre el plano semántico y el sintáctico: los números son *objetos matemáticos*, los numerales son *símbolos* que forman parte del lenguaje.

Una vez hecha esta precisión, en lugar de 0, S0, SS0,… usaremos como abreviatura los números en negrita: **0**, **1**, **2**, **3**,…

Por otra parte, dado que la teoría trata de la suma y el producto, el lenguaje deberá contener a los símbolos +, ·, =, que representan la suma, el producto y la igualdad, respectivamente.

Con los símbolos hasta aquí definidos ya podemos traducir al lenguaje formal la primera de las dos afirmaciones que escribimos más arriba. «Dos más dos es cuatro» se traduce como:

SS0 + SS0 = SSSS0, o bien, con las abreviaturas, como **2** + **2** = **4**.

La segunda afirmación: *La suma de dos números pares es un número par*, ya no se refiere a dos o tres números específicos, sino que habla simultáneamente de una infinidad de números. *La suma de dos números pares es un número par* quiere decir que «2 + 2 es par», «2 + 4 es par», «4 + 2 es par», «4 + 4 es par», «4 + 6 es par» y así sucesivamente.

Para capturar esta infinitud en una sola expresión se introducen *variables*, que son letras que representan números cualesquiera. Al usar variables, la afirmación «*La suma de dos números pares es un número par*» puede reformularse de este modo: «Si x e y son ambos números pares, entonces $x + y$ también es un número par».

Para las variables normalmente se usan letras como x, y, z, o bien n, m, k. En nuestro lenguaje formal las escribiremos como v_1, v_2, v_3, v_4,… uniendo la letra v (de variable) con cada uno de los subíndices 1, 2, 3,… (Recurrimos a los subíndices porque las letras del alfabeto se terminan, pero los números no).

Ahora bien, de este modo podría generarse alguna confusión cuando hablemos del 1 en cuanto número en sí mismo o en cuanto subíndice de una variable. Por ese motivo las variables en el lenguaje formal se escribirán como $v_{|}$, $v_{||}$, $v_{|||}$, $v_{||||}$,… usando solamente la letra v y repeticiones del símbolo |. Una vez hecha esta precisión, y por legibilidad, seguiremos en lo sucesivo usando la anotación v_1, v_2, v_3,… (y aún más frecuentemente x, y, z,…) como abreviaturas.

Algo importante a tener en cuenta:

En nuestro lenguaje formal las variables v_1, v_2, v_3,… sólo se referirán a números (no a conjuntos, ni a funciones ni a ningún otro objeto matemático que no sea un número).

Recordemos ahora que un número n es par si puede dividirse por dos, es decir, si existe algún otro número m tal que $n = 2m$. Esta última condición se escribe en nuestro lenguaje de variables numeradas de esta forma: $\exists v_3\ (v_1 = \mathbf{2}\cdot v_3)$. Utilizaremos como abreviatura Par(v_1) para la expresión $\exists v_3\ (v_1 = \mathbf{2}\cdot v_3)$ y Par(v_2) para la expresión $\exists v_3\ (v_2 = \mathbf{2}\cdot v_3)$.

Ahora sí, estamos listos para escribir en nuestro lenguaje formal la segunda de las afirmaciones: «La suma de dos números pares es un número par»:

$$\forall v_1 \forall v_2\ (\mathrm{Par}(v_1) \bigwedge \mathrm{Par}(v_2) \rightarrow \mathrm{Par}(v_1 + v_2))$$

Finalmente, para escribir la tercera de las afirmaciones, recordemos que un número x es *primo* si es mayor que 1 y no tiene divisores propios, es decir, si aparece escrito como producto de dos números y, z, uno de estos números tiene que ser x (y el otro el número 1). Podemos definir entonces «Ser primo» en nuestro lenguaje mediante la fórmula

$$\mathrm{Pr}(x)\!: \neg(x = 0) \bigwedge \neg(x = \mathbf{1}) \bigwedge \forall y \forall z (yz = x \rightarrow (y = x \bigwedge z = \mathbf{1}) \bigvee (y = \mathbf{1} \bigwedge z = x))$$

La tercera de las afirmaciones: «Todo número mayor que 1 es divisible por algún primo», puede escribirse ahora en el lenguaje formal como

$$\forall x(\neg(x = 0) \bigwedge \neg(x = \mathbf{1}) \rightarrow \exists y \exists z\ (\mathrm{Pr}(y) \bigwedge x = y \cdot z))$$

§ 2. Los enunciados

Todas las afirmaciones del lenguaje formal pueden escribirse utilizando solamente los siguientes doce símbolos:

$$\mathrm{S} \quad 0 \quad + \quad \cdot \quad = \quad v \quad | \quad \forall \quad \neg \quad \rightarrow \quad (\quad)$$

Llamaremos *expresión* a una sucesión finita cualquiera de estos símbolos. Está claro que no cualquier expresión puede aspirar a ser una afirmación del lenguaje. Por ejemplo, la expresión SS0 + SS0 = SSSS0, como ya hemos visto, es una afirmación, pero SS0 + SS0 = SS → SS0 claramente no lo es, ni tampoco, por ejemplo, ∀→S)(0.

Lo que nos proponemos ahora es algo mucho más ambicioso: definir, entre todas las posibles combinaciones de símbolos, las que corresponden a la noción de afirmación (o enunciado). Y hacerlo de un modo que una computadora pueda corroborar en una cantidad finita de pasos si una expresión cualquiera es o no una afirmación.

Para esto necesitamos identificar los ladrillos elementales que al combinarse entre sí dan lugar a las afirmaciones más simples. Nos proponemos una construcción

estratificada, que empieza por los *términos*.

> Los *términos* son las expresiones que se obtienen a partir del número 0 y de las variables al aplicar sucesivamente la función S y las operaciones de suma y multiplicación.[3]

Así por ejemplo SSSO es un término, y también lo son $(SS0 \cdot (S0 + S0))$, $S(Sv_1 + S0)$, o $(v_1 + (v_7 \cdot v_3))$. El primer ejemplo representa el numeral **3**, el segundo representa la operación aritmética $(\mathbf{2} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{1}))$, el tercero y el cuarto representan operaciones en las que aparecen incógnitas.

Pasamos ahora al segundo nivel: el de las fórmulas atómicas. Intuitivamente, corresponderán a las afirmaciones más básicas, que no involucran operaciones lógicas (como «*Dos más dos es cuatro*»).

Formalmente, una *fórmula atómica* es cualquier expresión que se obtenga igualando dos términos. Por ejemplo, $SS0 + SS0 = SSSS0$, o también $SS(v_1) + SS0 = SSSS0$ son fórmulas atómicas.

Las fórmulas atómicas de la aritmética en las que aparecen variables pueden pensarse, intuitivamente, como ecuaciones con incógnitas. Por ejemplo, $v_1 + \mathbf{2} = \mathbf{3}$ puede interpretarse como la ecuación $x + 2 = 3$.

Una *fórmula*, finalmente, es cualquier expresión obtenida a partir de las fórmulas atómicas por aplicación reiterada de los conectivos lógicos y los cuantificadores.[4]

Ejemplos de fórmulas son $(v_1 = v_2) \rightarrow (Sv_1 = Sv_2)$, o también $\forall v_1 \forall v_2(\neg(v_1 = v_2) \rightarrow \neg(Sv_1 = Sv_2))$.

Podemos resumir lo que hemos hecho hasta ahora del siguiente modo:

1. Identificamos ciertas fórmulas elementales: las ecuaciones o identidades que resultan de igualar dos términos.
2. A partir de estas fórmulas elementales, que hemos llamado atómicas, obtenemos todas las fórmulas por aplicación reiterada de los conectivos lógicos y los cuantificadores.

Notemos ahora que tenemos todavía que distinguir cuáles son entre las fórmulas aquellas a las que podemos asignarles un valor de verdad (verdadero o falso). Éstas son realmente las fórmulas que nos interesan: las afirmaciones, o *enunciados*. En efecto: no toda fórmula es una afirmación. Para entender esto, observemos que a la segunda fórmula atómica que dimos como ejemplo:

$$SS(v_1) + SS0 = SSSS0$$

no puede asignársele un valor definitivo de verdad. Si reemplazamos a v_1 por el numeral **0** la expresión que resulta es verdadera, pero si la reemplazamos por cualquier otro numeral distinto de **0** la expresión que resulta es falsa.

Algo similar ocurre con la fórmula $\exists v_3(v_1 = \mathbf{2} \cdot v_3)$. Es claro que si reemplazamos a v_1 por un numeral par obtendremos una afirmación verdadera, y si reemplazamos a v_1 por un numeral impar obtendremos una afirmación falsa.

Lo que ocurre en estos dos casos, es que la variable v_1 no está afectada por ningún cuantificador. Observemos que al reemplazar a v_1 en $\exists v_3(v_1 = \mathbf{2} \cdot v_3)$ por un numeral cualquiera, por ejemplo, **1**, obtenemos la expresión $\exists v_3(\mathbf{1} = \mathbf{2} \cdot v_3)$. Esta expresión, que involucra también a una variable, v_3, sí es una afirmación (falsa en este caso), porque la única variable que aparece, que es v_3, está afectada por un cuantificador, lo que fuerza a considerar todos los posibles numerales para dar luego un valor de verdad único y definitivo a la expresión.[5]

Una aparición de una variable es *libre* en una fórmula si en esa aparición la variable no está afectada por ningún cuantificador. Intuitivamente las variables que aparecen libres son aquellas que pueden ser reemplazadas libremente por números.[6] Gracias a esta distinción sintáctica podemos definir finalmente a las afirmaciones de nuestro lenguaje, es decir, aquellas expresiones a las que puede asignársele de modo inequívoco un valor de verdad, y que llamaremos de ahora en más *enunciados*:

> Un *enunciado* es una fórmula en la que ninguna variable tiene apariciones libres.

La definición que hemos dado de enunciado cumple con nuestros propósitos, en el sentido de que puede corroborarse por una computadora, en una cantidad finita de pasos. En efecto, vale la siguiente

Proposición: *Dada una expresión cualquiera del lenguaje formal, hay un procedimiento mecánico para determinar en una cantidad finita de pasos si esa expresión es o no una fórmula. Y también para determinar si la expresión es o no un enunciado.*

Demostración: Véase el Ejercicio 3.1 al final del capítulo.

§ 3. Los axiomas y reglas de inferencia de la lógica de primer orden

Ya hemos observado en el capítulo 2 que para llegar a un procedimiento absolutamente mecánico para la corroboración de demostraciones, además de los axiomas específicos de cada teoría, debemos explicitar también (como marco general

de toda teoría) los axiomas de la lógica y las reglas de inferencia que se emplean en las demostraciones formales.

Esta lógica subyacente es la llamada *lógica de primer orden*[7]y damos aquí una de las presentaciones más conocidas de sus axiomas. No nos detendremos a analizar el significado intuitivo de cada uno de estos axiomas; para nuestros propósitos bastará esencialmente saber que es una lista finita de diez esquemas que dan el marco lógico para los razonamientos formales.

Al primer axioma lo llamaremos L_1:

L_1: $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

Éste es en realidad un *esquema de axioma*, es decir, no estamos dando un axioma específico sino la forma general de una familia infinita de axiomas, cada uno de los cuales se obtiene reemplazado a P y a Q por enunciados, o más en general por fórmulas específicas. La misma aclaración vale para los axiomas L_2 y L_3:

L_2: $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

L_3: $(\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$

El siguiente es el axioma L_4:

L_4: $\forall x P(x) \rightarrow P(x/t)$

Como los anteriores, éste es un esquema de axioma, pero requiere alguna explicación adicional. La expresión x representa una variable numerada cualquiera y $P(x)$ es una fórmula en la que x aparece como variable libre. La letra t representa un término del lenguaje, con una única restricción: en el caso de que el término tenga variables, ninguna de estas variables debe aparecer afectada por cuantificadores de P al efectuarse el reemplazo. $P(x/t)$ es la fórmula que se obtiene al reemplazar todas las apariciones de la variable x por un término concreto t del lenguaje. A modo de ejemplo, un axioma que corresponde a este esquema es: $\forall v_1\ (v_1 = v_1) \rightarrow (\mathbf{2} = \mathbf{2})$, que puede interpretarse como: *Si todo número es igual a sí mismo entonces dos es igual a dos*.

La restricción que impusimos sobre el término a reemplazar tiene el siguiente sentido: supongamos que tenemos la fórmula $\forall x \exists y (y \neq x)$. Es claro que de esta fórmula podemos derivar, sin error, por ejemplo, la fórmula $\exists y (y \neq x)$ o también, para cualquier numeral **n**, la fórmula $\exists y (y \neq \mathbf{n})$. Sin embargo, no podemos reemplazar a x por el término y, porque obtendríamos la fórmula $\exists y (y \neq y)$ que es falsa. La restricción que impusimos evita esta clase de errores.

El quinto esquema es:

L_5: $\forall x(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow \forall xQ)$

siempre y cuando x no aparezca como variable libre en la fórmula P.

En general, dado que la lógica de primer orden está concebida como marco para razonamientos matemáticos, se incluyen también axiomas para la igualdad matemática. Se obtiene así la *lógica de primer orden con igualdad*, que tiene los siguientes axiomas (esquemas) adicionales:

L_6: $x = x$

L_7: $x = y \rightarrow y = x$

L_8: $x = y \rightarrow (y = z \rightarrow x = z)$

L_9: $x = y \rightarrow t(v_1,\dots v_{i-1}, x, v_{i+1},\dots v_n) = t(v_1,\dots v_{i-1}, y, v_{i+1},\dots v_n)$ donde t es un término cualquiera.

L_{10}: $x = y \rightarrow (\varphi(v_1,\dots v_{i-1}, x, v_{i+1},\dots v_n) \rightarrow \varphi(v_1,\dots v_{i-1}, y, v_{i+1}, v_n))$ donde φ es una fórmula atómica cualquiera.

Si bien estos diez esquemas definen lo que es en realidad un conjunto infinito de axiomas (ya que es infinito el número de posibles reemplazos por fórmulas y términos que corresponde a cada esquema), este conjunto infinito es recursivo porque dada una fórmula cualquiera, es siempre posible determinar en una cantidad finita de pasos si corresponde o no a alguno de los diez esquemas indicados. (¡Pensarlo!).

Fijados los axiomas lógicos, debemos enunciar ahora las *reglas de inferencia*, que son aquellas que nos dicen qué conclusiones es válido extraer de una o más hipótesis propuestas.

La lógica de primer orden se rige por dos reglas de inferencia, que son:

1) Regla de *modus ponens*: De P y de (P → Q) se deduce Q.
2) Regla de generalización: Si x es una variable cualquiera, entonces de P se deduce $\forall x$P.

Observemos que estas dos reglas son puramente sintácticas, es decir, se reducen a una simple manipulación mecánica de símbolos.

En estas reglas, tanto P como Q pueden pensarse simplemente como expresiones (como secuencias finitas de símbolos) cuyo eventual significado es irrelevante. Desde este punto de vista, la primera regla se puede interpretar así: si en la demostración aparecen dos fórmulas que están separadas por el símbolo → y también aparece la fórmula a izquierda del símbolo →, entonces es válido que posteriormente en la demostración aparezca la fórmula a derecha del símbolo →.

La segunda regla dice simplemente que si se encuentra una fórmula P en la demostración, puede agregarse también la fórmula que resulta de anteponer a P los símbolos $\forall x$ (donde x es una variable numerada cualquiera).

Reunimos en este cuadro los axiomas de la lógica de primer orden con igualdad:

Axiomas lógicos:

L_1: $P \to (Q \to P)$

L_2: $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

L_3: $(\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$

L_4: $\forall x P(x) \to P(x/t)$ (Si las variables de t no están bajo cuantificadores en P)

L_5: $\forall x(P \to Q) \to (P \to \forall x Q)$ (Si la variable x no ocurre libre en P)

L_6: $x = x$

L_7: $x = y \to y = x$

L_8: $x = y \to (y = z \to x = z)$

L_9: $x = y \to t(v_1 \ldots v_{i-1}, x, v_{i+1}, v_n) = t(v_1, \ldots v_{i-1}, y, v_{i+1}, v_n)$

L_{10}: $x = y \to (\varphi(v_1, \ldots v_{i-1}, x, v_{i+1}, v_n) \to \varphi(v_1, \ldots v_{i-1}, y, v_{i+1}, v_n))$

Reglas de inferencia:

Regla de *modus ponens*: De P y de $(P \to Q)$ se deduce Q.

Regla de generalización: De P se deduce $\forall x$P.

§ 4. Demostraciones y teorías

En el capítulo 2 llamamos informalmente *teoría* a cualquier selección de afirmaciones, propuestas como axiomas (en el Apéndice I se muestran algunos

ejemplos concretos de teorías). Los conceptos que hemos expuesto en este capítulo nos permiten precisar más esta noción.

Una *teoría formal* (para la aritmética) es un conjunto de enunciados de primer orden escritos con los símbolos S, 0, +, ·, =, v, |, ∀, ¬, →, (,). A los enunciados seleccionados los llamaremos *axiomas de la teoría*. Esta definición se corresponde con la idea intuitiva que dimos en el capítulo 2, con la condición adicional de que los axiomas son enunciados escritos en el lenguaje formal.

Damos como ejemplo de teoría formal la llamada *aritmética de primer orden de Peano*. (Como ya dijimos, la letra S indica la función *sucesor*, que a cada n le asigna su sucesor inmediato $n + 1$).

(1) $\neg(0 = \mathrm{S}x)$
(2) $\mathrm{S}x = \mathrm{S}y \rightarrow x = y$
Axiomas de la función sucesor

(3) $x + 0 = x$
(4) $x + \mathrm{S}y = \mathrm{S}(x + y)$
Axiomas para la suma

(5) $x \cdot 0 = 0$
(6) $x \cdot \mathrm{S}y = (x \cdot y) + x$
Axiomas para el producto

(7_φ) Para cada $\varphi(x, v_1,\dots v_n)$, si x no ocurre bajo cuantificadores en φ, el axioma

$$\varphi(0, v_1,\dots v_n) \rightarrow (\forall x(\varphi(x, v_1,\dots v_n) \rightarrow \varphi(\mathrm{S}(x), v_1,\dots v_n)) \rightarrow \forall x(\varphi(x, v_1,\dots v_n))$$

Este último es el llamado axioma-esquema de *inducción*. Lo que nos dice es que si una propiedad dada por una fórmula del lenguaje se verifica en 0 y cada vez que se verifica en x, vale también en $x + 1$, entonces la propiedad vale para todos los números.

En la presentación de los axiomas, en general, se omiten por brevedad los cuantificadores universales. Por ejemplo, el axioma (2) $\mathrm{S}x = \mathrm{S}y \rightarrow x = y$ debe entenderse, en rigor, como una abreviatura del enunciado $\forall x \forall y(\mathrm{S}x = \mathrm{S}y \rightarrow x = y)$. Esto puede hacerse porque ambas fórmulas son equivalentes. En efecto, a partir de la fórmula $x + \mathrm{S}y = \mathrm{S}(x + y)$ pueden obtenerse, por la regla de generalización, primero la fórmula $\forall y(x + \mathrm{S}y = \mathrm{S}(x + y))$ y luego la fórmula $\forall x \forall y(x + \mathrm{S}y = \mathrm{S}(x + y))$. Recíprocamente, a partir de la fórmula $\forall x \forall y(x + \mathrm{S}y = \mathrm{S}(x + y))$, podemos obtener $x + \mathrm{S}y = \mathrm{S}(x + y)$ de la siguiente manera:

1. $\forall x \forall y(x + \mathrm{S}y = \mathrm{S}(x + y))$
2. $\forall x \forall y(x + \mathrm{S}y = \mathrm{S}(x + y)) \rightarrow \forall y(x + \mathrm{S}y = \mathrm{S}(x + y))$

Axioma L_4 (para $t = x$)

3. $\forall y(x + Sy = S(x + y))$
   Modus ponens (de líneas 1 y 2)
4. $\forall y(x + Sy = S(x + y)) \rightarrow x + Sy = S(x + y)$
   Axioma L_4 (para $t = y$)
5. $x + Sy = S(x + y)$
   Modus ponens (de líneas 3 y 4)

También podemos precisar ahora la noción de demostración.

Una *demostración* es una sucesión finita de enunciados $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en la que cada uno de ellos es o bien un axioma lógico, o bien un axioma de la teoría, o bien se puede deducir de enunciados precedentes por aplicación de las reglas de inferencia (*modus ponens* o generalización). Un enunciado Q es *demostrable* (también se dice que es un *teorema*) si es la última de las expresiones de una demostración, es decir, si existe una demostración $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en la que $P_n = Q$.

Esta definición de *demostración* se corresponde perfectamente con la idea intuitiva de razonamiento. A partir de ciertos principios iniciales (los axiomas) se obtienen conclusiones, y luego a partir de ellas se obtienen nuevas conclusiones y así, sucesivamente, hasta llegar a la afirmación que se deseaba demostrar. Observemos también que en una demostración todas las fórmulas que aparecen (y no sólo la última) son demostrables. (¡Pensarlo!).

A continuación damos, como ejemplo, una demostración formalizada en la aritmética de primer orden de Peano de que $1 + 1 = 2$.

Recordemos que en la presentación de los axiomas están omitidos los cuantificadores universales. Así, por ejemplo, el axioma $x + 0 = x$ debe entenderse, en rigor, como $\forall x(x + 0 = x)$. La combinación de la regla de generalización y el axioma L_4 nos permite sustituir «directamente» las variables libres por términos en las fórmulas presentadas sin cuantificadores. El procedimiento es similar al que utilizamos arriba: aplicar primero la regla de generalización (tantas veces como sea necesario de acuerdo a las variables que aparezcan), después el axioma L_4 para sustituir las variables por términos y finalmente la regla de *modus ponens* (tantas veces como sea necesario). En el caso de $x + 0 = x$, podemos sustituir a x por (por ejemplo) el término **1**, en los siguientes pasos:

1. $x + 0 = x$	Axioma
2. $\forall x(x + 0 = x)$	Regla de generalización
3. $\forall x(x + 0 = x) \rightarrow \mathbf{1} + 0 = \mathbf{1}$	Axioma L_4 (para $t = 1$)
4. $\mathbf{1} + 0 = \mathbf{1}$	*Modus ponens* (de líneas 2 y 3)

En la demostración que exponemos pasamos entonces directamente del paso 1 al paso 4 al realizar sustituciones de variables por términos. Dejamos al lector, como ejercicio, reescribir la demostración que sigue con todos los pasos «omitidos» al aplicar este procedimiento.

1. $x + 0 = x$	Axioma de Peano (3)
2. $\mathbf{1} + 0 = \mathbf{1}$	Sustitución de *x* por el término **1**
3. $x + S(y) = S(x + y)$	Axioma de Peano (4)
4. $x + S(0) = S(x + 0)$	Sustitución de *y* por el término 0
5. $\mathbf{1} + S(0) = S(\mathbf{1} + 0)$	Sustitución de *x* por el término **1**
6. $x = y \rightarrow S(x) = S(y)$	Axioma de igualdad (L_9)
7. $x = \mathbf{1} \rightarrow S(x) = S(\mathbf{1})$	Sustitución de *y* por el término **1**
8. $\mathbf{1} + 0 = \mathbf{1} \rightarrow S(\mathbf{1} + 0) = S(\mathbf{1})$	Sustitución de *x* por el término $\mathbf{1} + 0$
9. $S(\mathbf{1} + 0) = S(\mathbf{1})$	*Modus ponens* (de líneas 2 y 8)
10. $\mathbf{1} + S(0) = S(\mathbf{1} + 0) \rightarrow (S(\mathbf{1} + 0) = S(\mathbf{1}) \rightarrow \mathbf{1} + S(0) = S(\mathbf{1}))$	Axioma de igualdad L_8
11. $S(\mathbf{1} + 0) = S(\mathbf{1}) \rightarrow \mathbf{1} + S(0) = S(\mathbf{1})$	*Modus ponens* (de líneas 5 y 10)
12. $\mathbf{1} + S(0) = S(\mathbf{1})$	*Modus ponens* (de líneas 9 y 11)

Dado que, de acuerdo con las abreviaturas, S(0) es **1** y que S(**1**) es 2, la línea 12 es $\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{2}$, como queríamos probar (compárese con la demostración informal del capítulo 1, Figura 2).

§ 5. La verdad en matemática: Una definición formal

Dijimos que, intuitivamente, la característica esencial de un enunciado es que puede asignársele inequívocamente un valor de verdad: o bien verdadero o bien falso. Nuestra intención es ir más allá de esta noción intuitiva y dar ahora una definición precisa del concepto de *verdad* para enunciados escritos en el lenguaje formal. Hemos visto que las fórmulas del lenguaje se definen jerárquicamente, paso a paso, procediendo desde expresiones más simples hacia otras más complejas. Utilizaremos

ese mismo procedimiento para dar la definición de verdad. Sin embargo, extenderemos la definición de verdad también para fórmulas con variables libres, que pueden considerarse como abreviaturas de enunciados y que aparecen tanto en las demostraciones formalizadas como en las axiomatizaciones usuales de las teorías (véanse las presentaciones habituales de teorías axiomáticas en el Apéndice I). Damos entonces, por pasos sucesivos, la definición de *fórmula verdadera* en **N**.

1. Los enunciados más simples son aquellos en los que no aparece ningún símbolo lógico, es decir, las fórmulas atómicas sin variables, que llamaremos *enunciados atómicos*. En nuestro lenguaje para la aritmética, estos enunciados resultan de igualar dos términos que no contienen variables. Por ejemplo $\mathbf{1} = \mathbf{2} \cdot (\mathbf{3} + \mathbf{5})$ o también $\mathbf{3} + \mathbf{5} = \mathbf{4} \cdot \mathbf{2}$. Diremos que un enunciado atómico es *verdadero* si los dos términos a izquierda y derecha de la igualdad representan el mismo número. En caso contrario el enunciado será *falso*. De los ejemplos, el primer enunciado es falso y el segundo es verdadero.

2. Consideremos ahora una fórmula $\mathrm{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Esta notación indica que las variables libres que aparecen efectivamente en la escritura de la fórmula P están todas entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$. (Es decir, puede ocurrir que alguna de las variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$ no figure en la escritura de P, pero lo que no puede ocurrir es que haya alguna variable libre en la escritura de P distinta de todas éstas).

   2.a. Si $\mathrm{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una fórmula atómica, diremos que es *verdadera* si son verdaderos todos los enunciados atómicos que resultan de reemplazar las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por numerales cualesquiera.

   2.b. Si P es del tipo $\neg$Q, es claro que también Q se escribe a lo sumo con las variables libres $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Diremos que P es *verdadera* si Q es falsa y que P es *falsa* si Q es verdadera.

   2.c. Si P es del tipo $\mathrm{Q} \to \mathrm{R}$, es claro que tanto Q como R se escriben a lo sumo con las variables libres $x_1, x_2, \ldots, x_n$. (Podría ser aquí que o bien Q o R estuvieran escritas con *menos* variables libres que P, pero cualquier variable libre de Q o R será también variable libre de P). En definitiva, también Q es $\mathrm{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y R es $\mathrm{R}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Diremos que P es *falsa* si Q es verdadera y R es falsa. En cualquier otro caso diremos que P es *verdadera*.

   2.d. Finalmente, si P es del tipo $\forall x\mathrm{Q}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, para cada reemplazo de la variable x por un numeral $\mathbf{a}$, la fórmula $\mathrm{Q}(\mathbf{a}, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no puede tener otras variables libres que $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Diremos que P es *verdadera* si son verdaderas *todas* las fórmulas $\mathrm{Q}(\mathbf{a}, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que se obtienen de reemplazar a x por un numeral cualquiera $\mathbf{a}$.

Observemos que la definición de verdad no es finitista: la verdad de $\forall x\mathrm{P}(x)$ no puede verificarse en general en una cantidad finita de pasos porque involucra (en principio) verificar la verdad de los infinitos casos P(0), P(**1**), P(**2**),…

De todos modos hay algunos enunciados cuya verdad o falsedad sí puede determinarse mecánicamente en una cantidad finita de pasos. Esto sucede, por ejemplo, con todos los enunciados en los que no aparecen variables (los enunciados atómicos). Una computadora puede verificar en una cantidad finita de pasos si es verdad, o no, que $\mathbf{2} + \mathbf{13} = \mathbf{4} \cdot \mathbf{2} + \mathbf{7}$. Proponemos como ejercicio pensar aquí un procedimiento finito para verificar la igualdad de dos términos cualesquiera sin variables.

Hay otros enunciados en los que aparecen variables, y aun así su verdad o falsedad puede también determinarse en una cantidad finita de pasos. Por ejemplo, el enunciado «235 es un número par». Hay incluso enunciados de la forma $\forall x\mathrm{P}(x)$ cuya verdad puede determinarse en una cantidad finita de pasos, por ejemplo, el enunciado «Para todo x, si x es impar y x es menor que 7, x es o bien 1, o bien 3, o bien 5».

Pero pensemos ahora, por ejemplo, en el enunciado de la llamada *Conjetura de Goldbach*:

«Todo número par mayor que dos es la suma de dos números primos».

Recordemos que habíamos expresado la propiedad «Ser par» en nuestro lenguaje formal mediante $\mathrm{Par}(x){:}\exists y(x = \mathbf{2} \cdot y)$.

Y la propiedad de ser primo mediante

$$\mathrm{Pr}(x){:}\ \neg x = \mathbf{1} \bigwedge \neg x = 0 \bigwedge \forall y \forall z(yz = x \rightarrow (y = x \bigwedge z = \mathbf{1}) \bigvee (y = \mathbf{1} \bigwedge z = x))$$

De modo que el enunciado de Goldbach puede expresarse en nuestro lenguaje formal como:

$$\forall x(\mathrm{Par}(x) \bigwedge \neg(x = \mathbf{2}) \rightarrow \forall y \forall z(\mathrm{Pr}(y) \bigwedge \mathrm{Pr}(z) \bigwedge x = y + z))$$

Observemos que este enunciado tiene la forma $\forall x\mathrm{P}(x)$. La conjetura de Goldbach, planteada en una carta por el matemático Christian Goldbach a Leonhard Euler en 1742, no ha sido desde entonces resuelta y permanece como uno de los problemas abiertos más antiguos de la matemática. De manera que hasta ahora (2009) la verdad de este enunciado sólo puede verificarse mediante la comprobación de los infinitos casos P(**1**), P(**2**),…

Terminaremos esta sección con un teorema que nos asegura que si partimos de fórmulas verdaderas, todos los enunciados que obtenemos mediante demostraciones también serán verdaderos. Este resultado, en realidad un teorema sobre fórmulas,

«desde afuera del sistema», es el que le permite a Gödel probar que su enunciado no demostrable es verdadero.

Observemos que al definir un lenguaje formal, tanto ese lenguaje como el sistema formal al que da lugar se convierten en posibles objetos de investigación matemática. Y que los métodos y razonamientos habituales de la matemática, así como el lenguaje usual de la matemática, se pueden ejercer *sobre* el lenguaje formal y el sistema para obtener teoremas y probar distintas propiedades del sistema. A estos teoremas «desde afuera» se los llama «metateoremas» para distinguirlos de los teoremas que puede probar por sí mismo el sistema. Y el lenguaje usual de la matemática, con respecto al lenguaje formal, es un «metalenguaje».

TEOREMA DE CORRECCIÓN:
Si todos los axiomas de una teoría son fórmulas verdaderas entonces todos los teoremas que se demuestran a partir de ellos son también fórmulas verdaderas.

Demostración: Para verificar esto veamos que si los axiomas de la teoría son fórmulas verdaderas entonces *todas las fórmulas* que aparecen en una demostración son también verdaderas (en particular será verdadera la última fórmula, que es el teorema demostrado).

En una demostración aparecen axiomas de la teoría (que estamos suponiendo que son verdaderos), los diez axiomas lógicos que hemos dado, y fórmulas que se obtienen por aplicación de las reglas de inferencia. Basta ver entonces:

1. Los axiomas lógicos son fórmulas verdaderas.
2. Si aplicamos las reglas de inferencia a fórmulas verdaderas obtenemos siempre fórmulas verdaderas.

Dejamos el punto 1 como ejercicio (véase al final del capítulo). Probemos el punto 2.

Comencemos con la regla de *modus ponens*: si $P \rightarrow Q$ es una fórmula verdadera y P es verdadera entonces, en efecto, Q es verdadera, ya que si Q fuera falsa (al ser P verdadera) sería falsa la fórmula $P \rightarrow Q$.

Por otra parte, el punto 2.d. de la definición de verdad nos dice que si P es verdadera entonces $\forall x$P es también verdadera, por lo que la regla de generalización también propaga la verdad. De manera que, una vez resuelto el Ejercicio 3.2, queda demostrado el teorema. ■

§ 6. COMPLETITUD Y CONSISTENCIA EN NUESTRA TEORÍA FORMAL

Habíamos dicho, en capítulos anteriores, que una teoría es *consistente* si a partir de ella no puede demostrarse simultáneamente un enunciado y su negación.

La noción de consistencia es esencial en lógica: en una teoría inconsistente *todo* enunciado es demostrable. (Es decir, las teorías inconsistentes son aquellas en las que «todo vale» y por eso mismo no tienen ningún interés, porque nada puede discriminarse). Probemos que esto realmente es así:

Proposición: Si una teoría es inconsistente, entonces todo enunciado es demostrable.

Demostración: Como paso previo a la demostración de este hecho planteamos estos dos ejercicios:

Ejercicio 3.3: Verifique que si la fórmula $P \to Q$ y la fórmula $Q \to R$ son ambas demostrables entonces $P \to R$ es demostrable.

Ejercicio 3.4: Verifique que, cualesquiera sean las fórmulas P y Q, la fórmula $P \to (\neg P \to Q)$ es demostrable.

Supongamos ahora que la teoría es inconsistente, y sea P el enunciado tal que tanto P como $\neg P$ son demostrables en la teoría. Tomemos un enunciado Q cualquiera y escribamos una demostración de P, a continuación una demostración de $\neg P$ y finalmente, a continuación, una demostración de $P \to (\neg P \to Q)$ (dada por el Ejercicio 3.4). Aplicando dos veces la regla de *modus ponens* podemos agregar a Q como enunciado final y, entonces, Q es demostrable. Es decir, si de una teoría puede demostrarse una contradicción, entonces *toda* fórmula es demostrable. ■

Recordemos también que hemos dado en capítulos previos dos definiciones de la noción de *completitud*: la primera apela a la noción de verdad, y la segunda es puramente sintáctica.

Definición 1 (semántica)
Una teoría es *completa* si todo enunciado verdadero puede obtenerse como teorema de la teoría.

Definición 2 (sintáctica)
Una teoría es *completa* si para todo enunciado E, o bien E es demostrable, o bien la negación de E es demostrable.

Estamos ahora en condiciones de probar que si los axiomas de la teoría son todos enunciados verdaderos estas dos definiciones son equivalentes:

> **Proposición:** Si los axiomas de una teoría son enunciados verdaderos, entonces la teoría es completa de acuerdo a la definición 1 si y sólo si es completa de acuerdo a la definición 2.

Demostración: Supongamos primero que la teoría es completa de acuerdo a la definición semántica. Si la teoría fuera incompleta (en el sentido sintáctico de la definición 2), entonces hay un enunciado P que no es un teorema y tal que ¬P tampoco es un teorema. Ahora bien, o P es verdadero, o P es falso. Si P es verdadero, de acuerdo a la definición 1, P es un teorema (absurdo). Si P es falso, la negación de P es un enunciado verdadero y, de acuerdo a la definición 1, la negación de P es un teorema (absurdo).

Recíprocamente, supongamos ahora que la teoría es completa de acuerdo a la definición 2 y que hay un enunciado P verdadero y no demostrable. Como P es no demostrable, entonces ¬P es un teorema. Pero entonces tendríamos que la negación de P es un teorema. Ahora bien, la negación de P es un enunciado falso (porque P es un enunciado verdadero). Tendríamos así un enunciado demostrable y falso. Esto no es posible, debido al Teorema de Corrección. Por lo tanto la teoría debe ser completa de acuerdo a la definición 1. ■

Estamos ahora finalmente en condiciones de dar el enunciado preciso del Teorema de Incompletitud de Gödel, en la forma en que lo demostraremos en los capítulos siguientes:

> TEOREMA DE INCOMPLETITUD (versión semántica):
> *En toda teoría recursiva y consistente para la aritmética, si los axiomas son enunciados verdaderos, puede exhibirse un enunciado verdadero y no demostrable en la teoría.*

> TEOREMA DE INCOMPLETITUD (versión sintáctica):
> *Para toda teoría recursiva y consistente que contenga suficiente aritmética existe un enunciado indecidible, es decir, un enunciado G tal que ni G ni ¬G son demostrables.* A.W. Moore, 2022, Oxford Press

En la versión general del teorema estamos pensando en una teoría escrita en un lenguaje formal con símbolos similar al que hemos construido en este capítulo. En particular, deben valer los siguientes requisitos: dada una expresión cualquiera, debe haber un procedimiento finito para determinar si esa expresión es un enunciado. Y dado un enunciado cualquiera, debe haber un procedimiento finito para determinar si

ese enunciado es o no un axioma. Decir que la teoría contiene *suficiente aritmética* tiene el significado preciso dado por las tres condiciones siguientes:

1. *Todo enunciado de la aritmética, cuya verdad pueda comprobarse mecánicamente en una cantidad finita de pasos, es demostrable a partir de los axiomas.*

Podría parecer que esta condición es semántica, ya que se refiere a la *verdad* de ciertos enunciados, pero en realidad estamos hablando sólo de una verdad verificable mecánicamente, a nivel sintáctico.

2. *Cualquiera que sea el numeral* **n**, *el enunciado* $\forall x(x \leq \mathbf{n} \bigvee \mathbf{n} \leq x)$ *es demostrable*.
3. *Cualquiera que sea el numeral* **n**, *el enunciado* $\forall x(x \leq \mathbf{n} \rightarrow (x = 0 \bigvee x = \mathbf{1} \bigvee \ldots \bigvee x = \mathbf{n}))$ *es demostrable*.

Un enunciado de la forma $\exists x\mathrm{P}(x)$ no es, en principio, finitista, pues equivale a una cantidad *infinita* de disyunciones: $\mathrm{P}(0) \bigvee \mathrm{P}(\mathbf{1}) \bigvee \mathrm{P}(\mathbf{2}) \bigvee \ldots$

Ahora bien, supongamos que la propiedad P fuera de tal naturaleza que si se cumple para algún x entonces se cumple necesariamente para algún $x < \mathbf{n}$ (con **n** un número fijo); éste es el caso, por ejemplo, de la propiedad «ser un divisor de **n** y a la vez un número primo».

Las condiciones 2 y 3 nos dicen que en esta situación $\exists x\mathrm{P}(x)$ sí es finitista, pues sólo hay una cantidad finita de números menores o iguales que **n** y $\exists x\mathrm{P}(x)$ equivale, por lo tanto, a la disyunción finita $\mathrm{P}(0) \bigvee \mathrm{P}(\mathbf{1}) \bigvee \mathrm{P}(\mathbf{2}) \bigvee \ldots \bigvee \mathrm{P}(\mathbf{n})$.

§ 7. La solución de un dilema

Ya observamos en el Ejemplo 1.1 que la teoría de primer orden de los números complejos plantea un aparente dilema respecto al Teorema de Gödel. En efecto, Gödel observó que si en una teoría cualquiera pueden definirse los números naturales junto con las operaciones de suma y multiplicación, entonces pueden desarrollarse los argumentos de su demostración para probar la incompletitud de la teoría. Dentro de los números complejos *están incorporados* los números naturales, que podemos encontrar como 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, etcétera. También están definidas las operaciones de suma y multiplicación para estos números, que son simplemente la restricción de la suma y el producto de los números complejos. De manera que hemos reencontrado a los números naturales dentro de los números complejos. Sin embargo, la teoría $T(\mathbf{C})$ de todos los enunciados verdaderos en **C** es recursivamente axiomatizable, y la lista

de axiomas que damos en el Ejemplo 1.1 es una axiomatización recursiva y *completa* para esta teoría.

Lo que ocurre es que la propiedad «Ser número natural» no puede «reconocerse» y ser definida en el lenguaje de primer orden con la suma y el producto de números complejos. Es decir, no hay un enunciado (ni un conjunto de enunciados) del lenguaje de primer orden que capture la disyunción infinita: $x = 1$ o $x = 1 + 1$ o $x = 1 + 1 + 1\dots$

Dicho de otro modo: si pudiera definirse «Ser número natural» por medio de un enunciado (o un conjunto de enunciados) de primer orden, valdría la generalización del argumento de Gödel y entonces la teoría $T(\mathbf{C})$ no sería recursivamente axiomatizable.

El hecho de que no pueda definirse en un lenguaje de primer orden esta clase de propiedad depende de un teorema de la lógica llamado Teorema de Compacidad (véase [Chang y Keisler]). A partir del capítulo 5 daremos la demostración del Teorema de Incompletitud, tanto en la versión semántica como en la versión sintáctica general.

Pero antes discutiremos algunos de los intentos de aplicación de estos teoremas fuera de la matemática.

§ 8. Ejercicios

Ejercicio 3.1: Dada una expresión cualquiera del lenguaje formal, hay un procedimiento mecánico para determinar en una cantidad finita de pasos si esa expresión es una fórmula y también si es en particular un enunciado.

Resolución: Damos la idea de un programa que comprueba si una expresión cualquiera es un enunciado, con una subrutina (que puede aislarse como otro programa), para detectar si la expresión es una fórmula.

Dada la expresión E, lo primero que hacemos es detectar las posibles apariciones de variables y verificar en cada aparición de una variable si es libre o no. En el caso de que una variable ocurra libre el programa termina y concluye que la expresión E no es un enunciado. Si todas las apariciones de las variables están afectadas por cuantificadores, el programa entra en una subrutina para chequear si la expresión E es una fórmula.

Dentro de esta subrutina el programa procede de este modo: lee el primer símbolo de la expresión E.

Si este símbolo es «¬», la expresión E es del tipo E = ¬F, y entonces procede a chequear la expresión (más corta) F para determinar si F es o no una fórmula. Si F no

es una fórmula, el programa se detiene y concluye que E no es una fórmula. Si F es una fórmula, el programa se detiene y concluye que E es una fórmula.

Si este símbolo es «(» procede a leer el último símbolo de la expresión E. Si este símbolo no es «)», el programa termina y concluye que E no es una fórmula. Si el último símbolo es «)», la expresión E es del tipo (F). Se procede entonces a leer el segundo símbolo de E. Si este segundo símbolo es «∀» se procede a leer los símbolos siguientes para detectar una variable numerada, es decir, el tercer símbolo debería ser «v» y los inmediatamente siguientes «|». Si los símbolos siguientes no corresponden a una variable numerada, el programa termina y concluye que E no es una fórmula. Si los símbolos siguientes corresponden a la variable «v_n», entonces E es del tipo ($\forall v_n$F), y se procede a chequear la expresión (más corta) F para determinar si F es o no una fórmula.

Si el segundo símbolo no es «∀» se procede a buscar dentro de F los conectivos «→», con algún símbolo a izquierda y alguno a derecha, para determinar si E es del tipo (F → G). Si no aparece ningún conectivo «→» en estas condiciones el programa termina y concluye que E no es una fórmula. Por cada conectivo «→» que aparece el programa analiza la expresión F (más corta que E) a izquierda y la expresión G (más corta que E) a derecha para determinar si son fórmulas.

Si el primer símbolo de E no es ni «¬», ni «(», la única posibilidad para que E sea una fórmula es que sea una fórmula atómica, y el programa entra en una subrutina para chequear si E es una fórmula atómica.

En esta subrutina el programa procede a buscar un único símbolo «=», con al menos un símbolo a derecha y al menos un símbolo a izquierda de =. Si E no tiene un signo = en estas condiciones, o tiene más de uno, no es una fórmula atómica. Si E tiene un signo = con al menos un símbolo a izquierda y un símbolo a derecha, E se escribe como F = G. Entonces el programa procede a la última subrutina para chequear si F y G son términos, de manera similar a lo que hicimos con las fórmulas.

Como el programa procede por análisis de expresiones cada vez más cortas, finalmente concluye y puede dar su veredicto sobre si la expresión E es o no una fórmula.

Ejercicio 3.2: Todas las fórmulas que provienen de los axiomas lógicos son verdaderas.

Resolución: Comencemos con un enunciado que provenga del esquema L_1: P → (Q → P). La única manera de que este enunciado sea falso es que P sea verdadero y Q → P sea falso, pero a la vez, la única forma en que Q → P sea falso es que Q sea verdadero y P falso. Es decir, para que el axioma fuera falso debería ser a la vez P verdadero y falso. Como esto no puede ocurrir, los enunciados dados por el esquema L_1 son siempre verdaderos.

Para los enunciados de la forma L_2 y L_3 se procede de forma similar.

Un enunciado de la forma L_4: $\forall v_n P(v_n) \to P(v_n/t)$ sólo puede ser falso si $\forall v_n\, P(v_n)$ es verdadero y $P(v_n/t)$ es falso para algún término t. Probaremos que esto no puede ocurrir para ningún término t (elegido con la restricción de que las variables de t no aparezcan afectadas por los cuantificadores de P en el reemplazo).

1. Si t es un numeral **a**, y $P(v_n/t)$ es falso, también es falso $\forall v_n\, P(v_n)$ (porque falla P(**a**)).
2. Si t es una variable x, por la restricción que impusimos, x ocurre libre en $P(v_n/x)$. Si fuera $P(v_n/x)$ falsa, esto significa que hay algún numeral **a** tal que $P(v_n/x)(x/\mathbf{a})$ es falsa. Pero como x es libre, $P(v_n/x)(x/\mathbf{a})$ es exactamente $P(v_n/\mathbf{a})$. (¡Pensarlo!). Y entonces también sería falso $\forall v_n\, P(v_n)$.
3. Si t se obtiene como combinación de la suma y el producto a partir de numerales y variables, el razonamiento puede reducirse esencialmente a los dos casos anteriores. Lo bosquejamos aquí: Si t no tiene variables, el resultado de las operaciones será también un numeral, y estamos en el caso 1. Si t tiene variables, suponer la falsedad de $P(v_n/t)$, implica que para una sustitución de variables *libres* de $P(v_n/t)$ por ciertos numerales, el enunciado que se obtiene es falso. Para estos numerales, al reemplazarlos en las variables de t, obtenemos un resultado, que es otra vez un numeral. Este numeral haría fallar también $P(v_n)$. Por lo que sería falso $\forall v_n\, P(v_n)$.

Finalmente, un enunciado de la forma L_5: $\forall v_n(P \to Q) \to (P \to \forall v_n Q)$ es falso solamente si $\forall v_n(P \to Q)$ es verdadero y $P \to \forall v_n Q$ es falso. Esto último sucede si P es verdadero y $\forall v_n Q$ falso. Si $\forall v_n Q$ es falso entonces existe algún número k tal que Q(**k**) es falso. Como v_n no ocurre libre en P y P es verdadero, P(**k**) es verdadero. (¡Pensarlo!). Luego $P(\mathbf{k}) \to Q(\mathbf{k})$ es falso, pero esto contradice que $\forall v_n(P \to Q)$ es verdadero.

Dejamos al lector la comprobación de que los axiomas de igualdad también son verdaderos.

Ejercicio 3.3: Verifique que si la fórmula $P \to Q$ y la fórmula $Q \to R$ son ambas demostrables entonces $P \to R$ es demostrable.

Resolución: En el axioma L_1: $P \to (Q \to P)$ reemplazamos P por $Q \to R$ y Q por P. Entonces $(Q \to R) \to (P \to (Q \to R))$ es un axioma. Tomemos una demostración de $Q \to R$ y agreguemos el axioma $(Q \to R) \to (P \to (Q \to R))$. Por *modus ponens* tenemos que $P \to (Q \to R)$ es demostrable. Por el axioma L_2: $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$, nuevamente aplicando *modus ponens* tenemos que $(P \to Q) \to$

$(P \to R)$ es demostrable. Finalmente, como $P \to Q$ es demostrable, una última aplicación del *modus ponens* nos dice que $P \to R$ es demostrable.

Ejercicio 3.4: Verifique que, cualesquiera que sean las fórmulas P y Q, la fórmula $P \to (\neg P \to Q)$ es demostrable.

Resolución: En el axioma L_1: $P \to (Q \to P)$ reemplazamos cada enunciado por su negación y obtenemos que $\neg P \to (\neg Q \to \neg P)$ es un axioma, por otra parte en el axioma L_3: $(\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$ intercambiamos P y Q y obtenemos $(\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)$.

Entonces $\neg P \to (\neg Q \to \neg P)$ y $(\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)$ son demostrables, luego, por el ejercicio anterior, $\neg P \to (P \to Q)$ es demostrable. Si intercambiamos a P y $\neg P$ tenemos que $P \to (\neg P \to Q)$ es también demostrable.

Ejercicio 3.5: Dar una demostración formalizada en la aritmética de primer orden de Peano de que $2 + 2 = 4$.

Sugerencia: probar primero que $2 + 1 = 3$, siguiendo las líneas de la demostración de $1 + 1 = 2$.

CAPÍTULO CUATRO

EL TEOREMA DE GÖDEL FUERA DE LA MATEMÁTICA

Julia Kristeva: Gödel y la semiótica. La elaboración de una teoría formal para el lenguaje poético. Paul Virilio: Gödel y las nuevas tecnologías. Régis Debray y Michel Serres: Gödel y la política. Deleuze y Guattari: Gödel y la filosofía. Jacques Lacan: Gödel y el psicoanálisis. Jean-François Lyotard: Gödel y la condición posmoderna. Ejercicios.

> Doctor; no lo soporto más, […] ¡Hágame valiente! ¡Hágame fuerte! ¡Hágame completo!
>
> PHILIP ROTH
> *El mal de Portnoy*

Nos proponemos examinar aquí una variedad de intentos de aplicación de los teoremas de Gödel en disciplinas sociales fuera de la matemática. Seguiremos esencialmente los ejemplos provistos por Alan Sokal y Jean Bricmont en *Imposturas intelectuales* [Sokal y Bricmont] y el análisis complementario, particularizado en el Teorema de Gödel, de Jacques Bouveresse en *Prodigios y vértigos de la analogía* [Bouveresse]. En algunos de los casos que consideramos: Lacan, Deleuze y Guattari, Lyotard, suministramos textos específicos sobre el Teorema de Gödel (y la discusión correspondiente) que Sokal y Bricmont no incluyen. También nuestra conclusión final es algo diferente de la de ellos.

§ 1. JULIA KRISTEVA: GÖDEL Y LA SEMIÓTICA. LA ELABORACIÓN DE UNA TEORÍA FORMAL PARA EL LENGUAJE POÉTICO

Los primeros trabajos de Julia Kristeva, escritos a mediados de los años sesenta, y reunidos en *Semiótica I* y *II*, tratan de lingüística y semiótica. Uno de los objetivos declarados es la elaboración de una teoría formal del lenguaje poético, «cuya teorización se puede fundamentar en la teoría de conjuntos». Sin embargo, aunque se invoca en estos trabajos una cantidad abrumadora de nociones técnicas matemáticas, nunca se justifica la elección inicial —bastante extraña— de la teoría de conjuntos (respecto a otras posibilidades) para formalizar el lenguaje poético. Peor aún, se deslizan una y otra vez gruesos errores que revelan la escasa comprensión de los conceptos matemáticos que se pretende utilizar. La impresión general es que se utiliza un lenguaje que sólo se comprende a medias, para impresionar, o intimidar, al lector no especializado.

Citamos aquí sólo unos pocos párrafos del artículo «Para una semiología de los paragramas» (1966), que tienen que ver con los teoremas de Gödel y los enunciados indecidibles. Una crítica más exhaustiva de otros errores matemáticos puede verse en [Sokal y Bricmont].

> Habiendo admitido que el lenguaje poético es un sistema formal cuya teorización se puede fundamentar en la *teoría de conjuntos*, podemos constatar, al mismo tiempo, que el funcionamiento de la significación poética obedece a los principios enunciados por el axioma de elección [Kristeva proporciona aquí la formulación matemática del axioma, que hemos dado en el Apéndice I, Ejemplo 5].
>
> O dicho en otras palabras, se puede elegir simultáneamente un elemento en cada uno de los conjuntos no vacíos de los que nos ocupamos. Así enunciado, el axioma es aplicable en nuestro universo E del *lp* [lenguaje poético], y precisa cómo cada secuencia lleva consigo el mensaje del libro.

Kristeva, como observan Sokal y Bricmont, nunca dice cómo podría constatarse esa «obediencia» de la significación poética al axioma de elección. En realidad, el axioma de elección se introduce en la teoría de conjuntos (como observamos en el Apéndice I, Ejemplo 5) para tener siempre la posibilidad de elegir elementos en conjuntos *infinitos*. Una primera pregunta —que Kristeva no se hace— es ¿por qué debería emplearse este axioma en el universo del lenguaje poético? ¿Cuáles serían esos conjuntos infinitos en poesía? Todavía peor: el axioma de elección no «dice» ni podría «precisar» cómo cada secuencia llevaría consigo un mensaje, porque es un axioma puramente existencial, que no indica nada sobre cómo se efectúa la elección.

Kristeva continúa más abajo:

> La compatibilidad del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos nos sitúa al nivel de un razonamiento a propósito de la teoría: una *metateoría* (y ése es el estatus del razonamiento semiótico) en la que los metateoremas han sido puntualizados por Gödel. Encontramos en ellos justamente los *teoremas de existencia* que no vamos a desarrollar aquí, pero que nos interesan en la medida en que proporcionan *conceptos* que permiten plantear de manera nueva, y sin ellos imposible, el *objeto* que nos interesa: el lenguaje poético.

Otra vez aquí se introducen conceptos matemáticos sofisticados sin ningún propósito concreto. La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel ya da en todo caso el marco suficiente para un razonamiento sobre la teoría, si lo que se quiere es dejar caer la palabra «metateoría». Y sobre todo, la hipótesis generalizada del continuo no tiene aquí nada que hacer, como señalan Sokal y Bricmont. En efecto, la hipótesis generalizada del continuo es un axioma independiente de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (véase el Apéndice I, Ejemplo 5) y se refiere a conjuntos *no numerables* (como los números reales) y a una estratificación, una jerarquía, de los

conjuntos infinitos *no numerables*. ¿Cuál sería la relación de este axioma con el lenguaje? Todos los libros que podría escribir la humanidad, y todos los textos concebidos y por concebir del lenguaje poético, contados desde el inicio de la escritura hasta un futuro eterno, constituyen un conjunto que no puede sobrepasar lo numerable (véase el Ejercicio 1.5): el primer piso, por decirlo así, de esta torre infinita de infinitos. De manera que la hipótesis del continuo no tiene en este contexto ningún sentido.

Tampoco está claro, y parece una alusión gratuita, qué significaría aquí que Gödel «haya puntualizado los metateoremas». Sobre todo, parece absurda la última afirmación de que sin estos conceptos de la teoría de conjuntos sería imposible formalizar el lenguaje poético. La teoría de conjuntos nos parece una elección extravagante y errónea para la clase de formalización que intenta Kristeva. Sin duda hay dentro de la matemática lenguajes y sistemas formales que podrían adecuarse mejor a sus propósitos.

Un poco más adelante Kristeva enuncia un resultado extremadamente técnico de la teoría de conjuntos de Gödel-Bernays y dice (sin molestarse en justificarlo):

> En el lenguaje poético, este teorema denota las diferentes secuencias como equivalentes a una función que las engloba a todas […] Lautréamont fue uno de los primeros en practicar conscientemente este teorema.

Difícilmente Lautréamont (1846-1870), como ironizan Sokal y Bricmont, hubiera podido practicar «conscientemente» un teorema desarrollado entre 1937 y 1940. Los teoremas, por otra parte, no se «practican», sino que se aplican.

A continuación Kristeva concluye:

> La noción de constructibilidad implicada por el axioma de elección, asociado a todo lo que acabamos de exponer con relación al lenguaje poético, explica la imposibilidad de establecer una contradicción en el espacio del lenguaje poético. Esta constatación se aproxima a la de Gödel, relativa a la imposibilidad de establecer la contradicción de un sistema a través de medios formalizados en ese sistema.

Hay aquí, en el mismo párrafo, dos ejemplos muy claros de que Kristeva no domina ni la terminología ni los conceptos que introduce. El axioma de elección no implica la noción de constructibilidad, sino que en realidad, como señalan Sokal y Bricmont, se introduce para poder afirmar la existencia de determinados conjuntos justamente cuando *no se dispone* de un procedimiento para construirlos. Pero lo más grave es la confusión con respecto a la tesis del Teorema de Consistencia de Gödel. El teorema dice, en realidad, exactamente lo contrario de lo que afirma Kristeva. Gödel muestra

la imposibilidad de establecer la consistencia (o *no* contradicción) de un sistema (con suficiente aritmética) a través de medios formalizados en ese sistema. La contradicción (o inconsistencia) de un sistema *sí* puede ser establecida por medios formalizados en ese sistema y es muy fácil dar ejemplos de teorías internamente contradictorias: basta agregar por ejemplo a la aritmética de Peano el enunciado «Uno más uno no es dos» para obtener una teoría inconsistente en la que tanto «Uno más uno es dos» como su negación pueden demostrarse.

A pesar de que Kristeva se alejó luego de esta clase de enfoques, fueron estos trabajos los que le dieron sobre todo su fama dentro de los círculos académicos franceses. En particular Roland Barthes escribió sobre ellos:

> Lo que ella desplaza es lo ya-dicho, es decir, la insistencia del significado, es decir, la tontería; lo que subvierte es la autoridad, la autoridad de la ciencia fonológica, de la filiación. Su trabajo es completamente nuevo, exacto […]

§ 2. Paul Virilio: Gödel y las nuevas tecnologías

Paul Virilio —arquitecto y urbanista— ha escrito principalmente en torno a la tecnología, la comunicación y la velocidad. Según *Le Monde*:

> Con una erudición asombrosa, que mezcla las distancias-espacios y las distancias-tiempos, este investigador abre un importante campo de cuestiones filosóficas que él llama la «dromocracia» (del griego *dromos*: carrera).

Sokal y Bricmont muestran que esta «erudición asombrosa» es, más bien, un malabarismo precario de conceptos mal entendidos y mal aplicados de Física, con errores elementales y terminología técnica que el propio Virilio no ha llegado a entender. Para nuestros propósitos nos limitamos a reproducir este párrafo sobre Gödel:

> Con esta deriva de figuras y figuraciones geométricas, la irrupción de las dimensiones y las matemáticas trascendentales, coronamos las prometidas cimas «surrealistas» de la teoría científica, cimas que culminan en el teorema de Kurt Gödel: la *prueba existencial*, método que demuestra matemáticamente la existencia de un objeto sin producirlo […] (Paul Virilio, 1984, *L’Espace critique*, París, Christian Bourgois).

En realidad, como ya hemos señalado en el capítulo 1, la prueba de Gödel no es meramente existencial sino que es *constructiva* (y éste es justamente uno de los hechos más remarcables de la demostración). Es decir: no se limita a probar la existencia de un enunciado indecidible para la aritmética, sino que proporciona un método finitista para obtenerlo (si se conoce el sistema recursivo de axiomas). El «método» supuestamente novedoso al que se refiere Virilio de «demostrar matemáticamente la existencia de un objeto sin producirlo» es algo que está en la metodología de la matemática muchísimo antes de Gödel, por ejemplo, en muchas de las demostraciones por el absurdo. (Si se asume como hipótesis transitoria que cierta clase de objeto no existe, y se llega a un absurdo que depende únicamente de esta suposición, se concluye la existencia del objeto «sin producirlo». El matemático Luitzen Brouwer, fundador del intuicionismo, se oponía a esta clase de inferencias puramente lógicas, sobre la base de la ley del tercero excluido).

La afirmación de Virilio muestra, sobre todo, que no es Gödel en todo caso el único que corona cimas «surrealistas».

§ 3. Régis Debray y Michel Serres: Gödel y la política

Régis Debray es un filósofo francés, influido inicialmente por Louis Althusser. En 1960 se sumó a la Revolución cubana y siguió al Che Guevara en su intento de extender la revolución hasta Bolivia. Fue allí detenido, torturado, y finalmente liberado en 1970. En sus primeras obras, que tuvieron gran influencia entre los marxistas e izquierdistas de la época, aconsejaba a los grupos guerrilleros la táctica del foquismo y la integración con la clase campesina.

En 1971 viajó a Chile, donde conoció a Salvador Allende. Tras el golpe militar de 1973 revisó su pensamiento sobre la teoría revolucionaria, en obras como *Crítica de la razón política*, de 1981.

Empezó posteriormente una carrera política en el Partido Socialista francés y fue nombrado durante el gobierno de François Mitterrand como asesor de políticas exteriores para el Tercer Mundo. Después de su renuncia por diferencias ideológicas, su trabajo se centró en la elaboración de una teoría general acerca de la transmisión cultural y de los medios de comunicación.

En *Crítica de la razón política* (1981) Debray dedica un capítulo a la supuesta relación entre el Teorema de Gödel y los infortunios colectivos. Dice allí:

> La demencia colectiva encuentra su razón última de ser en un axioma lógico que carece en sí mismo de fundamento: la «incompletitud».

Y presenta la analogía de esta manera:

> El enunciado del «secreto» de los infortunios colectivos, es decir, de la condición *a priori* de toda la historia política pasada, presente y futura, se expresa en unos cuantos términos sencillos e infantiles. Si nos fijamos en que las definiciones de la plusvalía y del inconsciente, se limitan, cada una de ellas, a una sola frase (y, en ciencias físicas, la ecuación de la relatividad general a tres letras), nos guardaremos de confundir simplicidad con simplismo. Este secreto tiene la forma de una ley lógica, generalización del Teorema de Gödel: no existe ningún sistema organizado sin clausura, y *ningún sistema se puede clausurar exclusivamente con la ayuda de sus elementos interiores*. (Cursivas del original).

Hay aquí varios niveles del disparate: en primer lugar, la frase en cursiva «*ningún sistema se puede clausurar exclusivamente con la ayuda de sus elementos interiores*» pareciera que pretende extrapolar el Teorema de Consistencia de Gödel, en el que se prueba que *para sistemas que contienen suficiente aritmética* (en el sentido preciso y técnico que hemos dado en el capítulo 3), la propiedad de consistencia no puede ser probada dentro del mismo sistema. Pero, como ya hemos observado, hay también sistemas de la matemática para los que *sí* se puede probar a la vez la consistencia y la completitud, por ejemplo, el cálculo proposicional, el cálculo de predicados, el cálculo monádico de predicados, o las teorías de modelos finitos. De manera que, para usar con alguna seriedad la analogía, Debray debería fundamentar primero que los principios de organización social, la cuestión del poder político, la lucha de clases, etcétera, pueden formularse como una teoría regida por la estricta lógica binaria matemática y en la que, además, a partir de estos principios «sociales», pueda derivarse la suficiente aritmética para cumplir con la hipótesis del teorema de consistencia.

En segundo lugar, Debray parece tirar por la borda aquí toda su formación marxista, ya que pretende encontrar un secreto inmutable con forma lógica (y no sólo lógica, sino con la forma más rigurosa posible de la lógica matemática) no sólo para toda la historia política pasada, presente y futura, sino también para la economía política y hasta para la teoría del inconsciente. En efecto, dentro del abecé del marxismo, la lógica y en general el razonamiento científico es una facultad adquirida históricamente, que intenta capturar, siempre parcialmente, y en un proceso dialéctico de adecuación, crítica y refinamientos, la complejidad de lo real.

Sokal y Bricmont lo dicen de este modo:

> El fondo del problema está en que Debray nunca explica la función que atribuye al Teorema de Gödel en su argumentación. Si pretende utilizarlo directamente en razonamientos sobre la organización social, entonces se equivoca sin más. Si, por el contrario, se trata de una simple

> analogía, podría ser sugestiva, pero no demostrativa. Para apoyar sus tesis sociológicas e históricas tendría que utilizar argumentos acerca de los seres humanos y de su conducta social, no de lógica matemática. Dentro de diez mil o un millón de años, el Teorema de Gödel seguirá siendo verdadero, pero nadie puede decir a qué se parecerá la sociedad humana en un futuro tan lejano. En consecuencia la invocación de este teorema da una apariencia de valor «eterno» a tesis que, en el mejor de los casos, son válidas en un contexto y una época dados.

Dentro de la matemática ya se han considerado, y se ensayan hace ya mucho tiempo, lógicas mucho más flexibles para intentar modelar disciplinas que no son reductibles a la lógica binaria matemática clásica. En particular, se han desarrollado las lógicas polivalentes, las lógicas modales, la lógica difusa, la lógica temporal y muchas otras. (Véase, por ejemplo [Gabbay, Hogger y Robinson]). Debray no parece haberse planteado nunca la primera pregunta, la cuestión más básica: si los principios de organización social pueden razonablemente encorsetarse en la lógica matemática clásica, y tampoco parece haber registrado nunca esta posibilidad de aproximarse a las disciplinas sociales con otra clase más adecuada de modelación matemática.

Otras conclusiones extravagantes que Debray extrae de su «generalización del Teorema de Gödel»:

> Al igual que el acto de engendrarse un individuo a sí mismo sería una operación biológicamente contradictoria (¿de «clonación» integral como aporía biológica?), el gobierno de un colectivo por sí mismo —*verbigratia*, «del pueblo por el pueblo»— sería una operación lógicamente contradictoria (de «la autogestión generalizada» como aporía política). (En *Crítica de la razón política*).

> Se sabe a ciencia cierta, en virtud de un axioma, el de la incompletitud, que la «emancipación del género humano» es un engaño eterno y necesario, pero mejor, después de todo, que el resignarse al seco cinismo del cada uno para sí. (Régis Debray, 1991, *Le rire et les larmes (3),* Libération).

Como observan Sokal y Bricmont respecto a la primera cita, la alusión a la «contradicción biológica» supuestamente inherente a la clonación, parece hoy en día ligeramente desfasada. Y aquí Debray logra concluir, siempre por supuestas razones lógicas, que no es posible «el gobierno del pueblo por el pueblo». En cuanto a la segunda, el Teorema de Incompletitud se ha transformado en un axioma que «se sabe a ciencia cierta».

Posteriormente, esta «generalización del Teorema de Gödel» de Debray, fue elevada al nivel de un «principio de Gödel-Debray» por el filósofo Michel Serres:

> Régis Debray aplica a los grupos sociales o redescubre en ellos el Teorema de Incompletitud válido para los sistemas formales, y demuestra que las sociedades sólo se organizan con la condición expresa de fundarse en algo distinto de ellas mismas, fuera de su definición o frontera. Son incapaces de bastarse por sí mismas. Debray denomina religiosa esta fundamentación y, a través de Gödel, da cumplimiento a los enunciados de Bergson cuya obra *Les Deux Sources de la morale et la religión* oponía las sociedades abiertas a las cerradas. […] Allí donde los historiadores describen superaciones o transgresiones de límites sociales o conceptuales, sin comprenderlos, porque han tomado prestado sin más un esquema ya hecho que Bergson elaboró basándose en Carnot y la termodinámica, Régis Debray construye directamente y comprende, por lo tanto, un nuevo esquema, basado en Gödel y los sistemas lógicos. La aportación de Gödel-Debray, decisiva, nos libera de los modelos antiguos y de su repetición. (Michel Serres, 1989, *Elements d'histoire des Sciences*. París, Bordas).

Jacques Bouveresse, en su libro *Prodigios y vértigos de la analogía*, proporciona muchos otros ejemplos que demuestran hasta qué punto las múltiples alusiones a Gödel, siempre entre confusas y equivocadas, funcionan en Debray como una máquina de «hacer creer», apoyada en una supuesta verosimilitud científica. Bouveresse analiza de este modo el caso:

> El caso de Debray es paradigmático, porque él trata de utilizar lo que es más peligroso, a saber, un resultado lógico muy técnico, para justificar conclusiones muy amplias y susceptibles de impresionar fuertemente al público no informado acerca de un objeto que a primera vista es lo más alejado que se pueda pensar de aquello de lo cual se trata, a saber, la teoría de las organizaciones sociales y políticas. A partir del Teorema de Gödel, Debray deduce, sin inmutarse, la naturaleza fundamentalmente religiosa del vínculo social (la conclusión no es novedosa, pero el argumento ciertamente lo es). Es lo mismo que elegir simultáneamente el punto de partida más difícil de manejar y la mayor distancia a franquear para alcanzar el fin, dos medios que transformarían seguramente la performance, si ésta fuera exitosa, en una verdadera hazaña intelectual.

Dentro del mismo libro enumera algunas de las características del Teorema de Gödel que hacen *a priori* arriesgada su extensión a la teoría de los sistemas sociales y políticos:

> 1. El Teorema de Gödel no se aplica, como ya lo he señalado, más que a sistemas que han sido completamente formalizados. Ahora bien, los sistemas sociales, al menos que yo sepa —y, se podría agregar, por suerte—, no se parecen ni de lejos ni de cerca a los sistemas formales o, en todo caso, formalizables. Esto constituye ya, de hecho, una respuesta completa a la cuestión planteada. Hagamos notar, a este respecto, que en un sistema formal los medios que pueden utilizarse para decidir una proposición son objetos de una codificación formal completamente precisa y explícita. Nada de esto puede decirse evidentemente a propósito de los medios que pueden —o no— ser utilizados para decidir una proposición en el interior de un sistema social. Y desde ese punto de vista, las dos situaciones son absolutamente incomparables. Por supuesto, está también completamente desprovisto de fundamento relacionar la oposición entre interno y externo, en el caso de los sistemas formales, con la que se plantea entre lo «profano», lo «laico» o lo «racional» por su parte y lo «religioso» por otra. Debray mismo parece dispuesto a aceptar todo esto, pero no a extraer las consecuencias que se imponen: esto constituye una manera de abandonar todo sin perder nada.
>
> 2. […] Es cierto que aunque no lo diga siempre claramente y que la expresión «Teorema de Incompletitud» evoque sobre todo el primer Teorema de Gödel (la existencia de una proposición indecidible), Debray quizá quiere hablar en realidad de lo que se llama generalmente el «segundo» Teorema de Gödel, a saber, del hecho de que la proposición que enuncia la no contradicción del sistema es ella misma indecidible y no puede ser demostrada con ayuda de argumentos formalizables dentro del sistema. Sería ciertamente extraño decir que un sistema como el de la aritmética «descansa» en su no contradicción, que, sin embargo, no puede demostrar, en un sentido comparable al que se pone en juego para decir que un sistema social descansa en la proposición «exterior» que lo trasciende y que, según Debray, es indispensable para fundarlo. […] Pero es poco probable que «fundar» un sistema social y para éste «autofundarse» pueda querer decir lo mismo que demostrar simplemente su no contradicción. Aquí también, si se cree poder aproximar el problema de la «consistencia» o coherencia de un sistema social al de la consistencia (la no

> contradicción) de un sistema formal, no se hace más que jugar con las palabras.

Y Bouveresse concluye de este modo:

> […] Es lamentable que «el mediólogo profesionalmente ligado a las tecnologías del hacer creer» no se interese aquí un poco por su propio caso y no se interrogue acerca de la manera que utiliza para hacernos creer las cosas importantes que él piensa haber descubierto. […] El Teorema de Gödel parece servir aquí sobre todo para dar un aire de seriedad científica a la idea antimünchhauseniana importante, pero banal, de que los sistemas político-sociales no pueden, como el famoso barón, salirse ellos mismo del charco (con la montura sobre la cual están sentados), tirando de sus propios cabellos. Pero esto es algo que ya se sabía perfectamente sin Gödel.

Más recientemente, en 1996, Debray reconoció que «la gödelitis es una enfermedad muy extendida» y que «extrapolar un resultado científico y generalizarlo fuera del campo al que pertenece expone […] a cometer graves errores». Dice finalmente también que su utilización del Teorema de Gödel es «simplemente a título metafórico o isomórfico». (Régis Debray, 1996, *L'incomplétud, logique du religieux*?, Bulletin de la Société Française de Philosophie, 90). Bouveresse también reflexiona sobre esta clase de «retiradas»:

> El secreto del éxito [de la manipulación del Teorema de Gödel] obedece a una regla simple y eficaz:
>
> 1. Comenzar por invocar la garantía de un resultado científico prestigioso para apoyar una tesis filosófica aparentemente ambiciosa, revolucionaria y radical.
> 2. Cuando la crítica comienza a hacerse un poco más precisa e insistente, explicar que el uso que se ha hecho de aquél no debía ser tomado al pie de la letra y que se trataba, de hecho, simplemente de una manera metafórica de expresar un contenido que, la mayor parte de las veces, termina siendo bastante anodino y relativamente banal.
>
> Que la mayor parte de los lectores no se haya dado cuenta desgraciadamente de esto desde el comienzo y haya creído realmente en la existencia de una cosa tan absurda como, por ejemplo, un pretendido

> «principio Debray-Gödel» constituye por supuesto un detalle sin importancia. Lo notable en todas las discusiones que tienen lugar sobre cuestiones de este tipo es que no se trata sino de heridas que pueden ser infligidas al amor propio o a la reputación de los autores mencionados, y nunca del precio pagado por aquellos que han sido víctimas por un tiempo y a veces por muchos años de las imposturas cometidas. ¿Y a quién le importa este tipo de cosas?

No nos resistimos a reproducir un último comentario de Debray, que Sokal y Bricmont usan de epígrafe para su capítulo sobre los abusos del Teorema de Gödel:

> Desde el día en que Gödel demostró que no existe una prueba de la consistencia de la aritmética de Peano formalizable en el marco de esta teoría (1931), los politólogos pudieron, por fin, comprender por qué había que momificar a Lenin y exhibirlo a los camaradas occidentales en un mausoleo, en el Centro de la Comunidad Nacional. (Régis Debray, 1980, *Le Scribe: Genèse du politique*, París, Bernard Grasset).

§ 4. Deleuze y Guattari: Gödel y la filosofía

Gilles Deleuze (1925-1995) es considerado uno de los filósofos franceses contemporáneos más importantes. Ha escrito numerosos libros de filosofía, algunos en colaboración con el psicoanalista Félix Guattari (1930-1992). Michel Foucault, al comentar sus obras *Diferencia y repetición* y *Lógica del sentido*, ha escrito que son libros «grandes entre los grandes […] Sin duda tan extraordinarios que es difícil comentarlos —muy pocos se han atrevido a hacerlo—». Y profetizó incluso: «Pero llegará un día, quizás, en que el siglo será deleuzeano».

Sokal y Bricmont analizan con numerosos ejemplos la parte de la obra en que los autores invocan conceptos y terminología procedentes de la física y las matemáticas y observan:

> La característica principal de los textos que hemos incluido es la falta absoluta de claridad y transparencia. Como es natural, los defensores de Deleuze y Guattari podrían replicar que, simplemente, dichos textos son profundos y no los comprendemos. Sin embargo, al analizarlos con atención, se observa una gran densidad de términos científicos, utilizados fuera de su contexto y sin ningún nexo lógico aparente, por lo menos si se les atribuye su significado científico usual. Por supuesto, Deleuze y Guattari son libres de emplear estos términos en otros sentidos diferentes: la ciencia no tiene el monopolio sobre el uso de

> vocablos como «caos», «límite» o «energía». Pero lo que sucede, así lo mostraremos, es que sus escritos están atiborrados también de términos extremadamente técnicos que nunca se utilizan fuera de discursos científicos especializados, y de los que no dan ninguna definición alternativa.
>
> Estos textos tocan una gran variedad de temas: el Teorema de Gödel, la teoría de los cardinales transfinitos, la geometría de Riemann, la mecánica cuántica, etcétera. No obstante, las alusiones son tan breves y superficiales que el lector que no posea un dominio previo de dichos temas no podrá entender nada concreto. Y los lectores especializados encontrarán, la mayoría de las veces, que sus afirmaciones no tienen el menor sentido o que, aun siendo a veces aceptables, son fútiles y confusas. […] En nuestra opinión, la explicación más plausible es que estos autores pretenden exhibir en sus escritos una erudición tan amplia como superficial.

Esta descripción se ajusta también exactamente a los párrafos sobre el Teorema de Gödel que aquí transcribimos de uno de los libros más famosos que escribieron juntos: *¿Qué es la filosofía?*

Deleuze y Guattari, de una manera muy confusa, definen sus propias nociones de consistencia, endoconsistencia, exoconsistencia y autorreferencia para *conceptos*. Copiamos aquí los fragmentos con que presentan esas definiciones:

> En segundo lugar, lo propio del concepto consiste en volver los componentes inseparables *dentro de él:* distintos, heterogéneos y no obstante no separables, tal es el estatuto de los componentes, o lo que define la *consistencia* del concepto, su endoconsistencia. […] Estas zonas, umbrales o devenires, esta indisolubilidad, son las que definen la consistencia interna del concepto. Pero éste posee también una exoconsistencia, con otros conceptos, cuando su creación respectiva implica la construcción de un puente sobre el mismo plano. Las zonas y los puentes son las junturas del concepto.

De acuerdo con este párrafo, consistencia y endoconsistencia coincidirían. También definen una noción de «autorreferencia» (otra vez *para conceptos*), muy distinta de la autorreferencia *para frases* que aluden a sí mismas que hemos usado nosotros.

> El concepto se define por su consistencia, endoconsistencia y exoconsistencia, pero carece de *referencia*: es autorreferencial, se plantea a sí mismo y plantea su objeto al mismo tiempo que es creado. El constructivismo une lo relativo y lo absoluto.

De acuerdo con esta definición, aparentemente *todo* concepto sería autorreferencial (en el sentido de ellos). Observemos también que ahora, en este párrafo, contra lo que se afirmaba anteriormente, parece que consistencia y endoconsistencia fueran propiedades diferentes. La confusión se acentúa en esta sorprendente afirmación:

> Las frases carecen de autorreferencia, como lo demuestra la paradoja del «yo miento».

Deleuze y Guattari no aclaran si aquí están utilizando la palabra «autorreferencia» en el sentido habitual de la lógica, o en alguna extensión (para frases) de la definición que ellos han dado de «autorreferencia» para conceptos. Si fuera la acepción habitual de la lógica, la afirmación es, por supuesto, falsa. Las frases, en realidad, *sí* tienen autorreferencia (algunas de ellas, por supuesto). Justamente, la frase que mencionan: «Yo miento», que reformulada apropiadamente para exhibir la paradoja diría: «Esta afirmación mía es mentira», se refiere a sí misma. La paradoja del «Yo miento» *no prueba* que las frases carezcan de autorreferencia, sino la dificultad de intentar asignarle un valor de verdad a esta frase. Ya hemos observado en el capítulo 1 que Russell y Whitehead proponían eliminar en sus sistemas formales esta clase de autorreferencia, pero Gödel mostró que sólo bastaba con limitarla. De hecho, su famoso enunciado «Yo no soy demostrable», se refiere a sí mismo.

Sin embargo, por una conclusión que obtienen más adelante, quizás ellos se refieren a su propia definición de autorreferencia. Pero ¿cómo debería extenderse esta definición a frases? Observemos que la definición que han dado de «autorreferencia» es «carecer de referencia». Decir que las frases no tienen autorreferencia sería algo así como una doble negación, a la que nosotros, al menos, no le encontramos ningún sentido.

Veamos el próximo párrafo:

> […] En la medida en que un número cardinal pertenece al concepto proposicional, la lógica de las proposiciones exige una demostración científica de la consistencia de la aritmética de los números enteros a partir de axiomas; ahora bien, de acuerdo con los dos aspectos del Teorema de Gödel, la demostración de consistencia de la aritmética no puede representarse dentro del sistema (no hay endoconsistencia), y el sistema tropieza necesariamente con enunciados verdaderos que, sin embargo, no son demostrables, que permanecen indecidibles (no hay exoconsistencia, o el sistema consistente no puede estar completo). Resumiendo, haciéndose proposicional, el concepto pierde todos los caracteres que poseía como concepto filosófico, su autorreferencia, su endoconsistencia y su exoconsistencia.

Otra vez aquí: ¿qué significa que un número cardinal «pertenece al concepto proposicional»? Quizás intentan aludir a la definición de número cardinal a partir de la lógica, como propusieron Frege y los logicistas. De cualquier modo, no es «la lógica de las proposiciones» lo que «exige» una demostración de la consistencia, sino que la consistencia del conjunto de axiomas, como observamos en el capítulo 2, es el requisito básico de un sistema formal, tanto para que la noción de demostración tenga algún sentido como para que los axiomas puedan postularse como axiomas específicos de algún objeto matemático. Si el conjunto de axiomas no es consistente, todo enunciado es demostrable y todo enunciado es refutable. Y no hay objeto matemático en que estos axiomas puedan tener sentido.

Por otra parte, el Teorema de Gödel se refiere a sistemas de enunciados, y no a conceptos, por lo que aquí se pone de manifiesto otra vez la confusión de definiciones. Deleuze y Guattari tratan de interpretarlo como la falta de endoconsistencia y exoconsistencia, pero éstas son propiedades que ellos definieron para *conceptos*, mientras que la consistencia habitual se define para *conjuntos de enunciados*.

Pasemos ahora a esta otra referencia sobre el Teorema de Gödel:

> La lógica tiene por lo tanto un paradigma, es incluso el tercer caso de paradigma, que ya no es el de la religión ni el de la ciencia, y que es como la recognición de lo verdadero en los prospectos o en las proposiciones informativas. La expresión docta «metamatemática» pone perfectamente de manifiesto el paso del enunciado científico a la proposición lógica bajo la forma de recognición. La proyección de este paradigma es lo que hace que, a su vez, los conceptos lógicos sólo se vuelvan figuras, y que la lógica sea una ideografía. La lógica de las proposiciones necesita un método de proyección, y el propio Teorema de Gödel inventa un modelo proyectivo. (Sobre la proyección y el método de Gödel, Nagel y Newman, *Le théoreme de Gödel*, Ed. du Seuil). Es como una deformación regulada, oblicua, respecto a su estatuto científico. Parece como si la lógica anduviera siempre debatiéndose con el problema complejo de su diferencia con la psicología.

Hay aquí otro ejemplo de cómo la terminología confusa de Deleuze y Guattari, tomada a medias de términos matemáticos precisos, y la comprensión también a medias de la prueba de Gödel los lleva finalmente a un error conceptual. ¿Qué significa, por ejemplo, para ellos «la proyección de un paradigma»? ¿Qué significa esta afirmación tan extraña de que los conceptos lógicos, bajo la proyección de un paradigma, «sólo se vuelvan figuras» y de que la lógica sea una «ideografía»?

Deleuze y Guattari parecen intentar explicarlo en la oración siguiente: «La lógica de las proposiciones necesita un método de proyección, y el propio Teorema de Gödel inventa un modelo proyectivo» y envían al lector a consultar el libro de Nagel y Newman (*El Teorema de Gödel*) sobre esta cuestión de la «proyección».

En la sección correspondiente (capítulo 6, «La idea de representación y su empleo en las matemáticas»), Nagel y Newman explican con varios ejemplos la idea de *representación* en matemática, por ejemplo la manera en que las formas existentes en la superficie de una esfera se proyectan sobre un plano, «de tal modo que las relaciones entre las figuras del plano reflejan las relaciones entre las figuras de la superficie esférica». Se refieren también a la traducción de la geometría al álgebra, de modo que las relaciones geométricas quedan representadas por otras algebraicas. Hay también dos ilustraciones que muestran cómo «líneas» y «puntos» pueden intercambiar su sentido en un contexto suficientemente abstracto.

Luego observan que la característica fundamental (y el objetivo) de la representación es mostrar que una estructura abstracta de relaciones en cierto campo de «objetos» existe también entre otros «objetos» (generalmente de un tipo distinto) pertenecientes a un campo diferente. Y hacen aquí la siguiente observación:

> Esta característica es lo que impulsó a Gödel a construir sus pruebas. Si, como él esperaba, unas complicadas proposiciones metamatemáticas acerca de un sistema formalizado de aritmética pudiesen ser traducidas a (o reflejadas por) proposiciones aritméticas contenidas dentro del propio sistema, se habría dado un gran paso en el camino de facilitar las demostraciones metamatemáticas.

Quedan aquí muy claros dos puntos. En primer lugar, que Nagel y Newman sugieren que los métodos de representación fueron una *inspiración* para Gödel. No es, como dicen Deleuze y Guattari, que «la lógica de las proposiciones *necesita* un método de proyección», sino, en todo caso, que Gödel se inspiró en los métodos de proyección para dar una demostración en particular, la que se le ocurrió a él, de la incompletitud de la aritmética. Alan Turing, por ejemplo, dio posteriormente otra prueba de que la aritmética es indecidible sobre la base de las computadoras elementales que se conocen con el nombre de «máquinas de Turing». Y sería igualmente extraño decir que «la lógica de las proposiciones *necesita* las máquinas de Turing».

En segundo lugar, más importante, Nagel y Newman señalan también muy claramente que la representación que eligió Gödel es a través de *relaciones aritméticas* (y no a través de «figuras»). De manera que en todo caso, si se invoca el enfoque de Gödel, la lógica queda sumergida en la aritmética. No es una «ideografía» sino que puede verse como una parte de la aritmética. Así lo veía Gödel, tal como queda muy claro en su conferencia Gibbs [Gödel (2)]. Ya en su trabajo «On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems» (véase en [Gödel (1)] o

en [Davis]) Gödel observa que la incompletitud de la aritmética puede verse como la imposibilidad de decidir si ciertas ecuaciones llamadas diofánticas tienen o no solución (véase también [Matijasevich]).

Pareciera más bien aquí que al leer el libro de Nagel y Newman, Deleuze y Guattari quedaron encandilados con las figuras y los ejemplos de geometría proyectiva de las ilustraciones, y extrapolaron, a partir de este ejemplo particular, la idea de que los conceptos lógicos «sólo se vuelven figuras».

En cuanto a la última afirmación: «Parece como si la lógica anduviera siempre debatiéndose con el problema complejo de su diferencia con la psicología» no tiene, al menos en este contexto, ningún sentido. Si se quiere abusar de metáforas y detectar problemas de identidad para la lógica, debería decirse en todo caso que la lógica se debate con el problema complejo de su diferencia *con la matemática*, tal como analiza cuidadosamente Paul Bernays en su artículo «La filosofía de la matemática y la teoría de la prueba de Hilbert» [Bernays].

§ 5. Jacques Lacan: Gödel y el psicoanálisis

Jacques Lacan (1901-1981) es considerado uno de los analistas más influyentes después de Sigmund Freud. Médico psiquiatra de profesión, se propuso reorientar el psicoanálisis hacia la obra original de Freud, en oposición a lo que consideraba desviaciones en el psicoanálisis posfreudiano. Incorporó además nociones de origen lingüístico, filosófico y matemático para redefinir muchos de los principales términos del léxico psicoanalítico e incorporar otras categorías, como la tríada de lo Real, lo Simbólico y lo Imaginario. Sostenía que «El inconsciente está estructurado "como" un lenguaje» y que es imposible para el inconsciente representar los objetos reales de manera absoluta en el lenguaje. Lo inconsciente remitiría a lo no dicho en el lenguaje.

Entre las nociones de matemática diseminadas profusamente en su obra figuran «ecuaciones» con números imaginarios (en las que, por ejemplo, el falo se identifica con $\sqrt{-1}$, como «parte que falta en la imagen deseada»), «algoritmos», diagramas y objetos de la topología (el toro, nudos, la cinta de Moebius). Fue uno de los primeros en prestar atención desde las ciencias sociales al Teorema de Gödel, y en tratar de vincular los conceptos de incompletitud y consistencia con el psicoanálisis, hasta el punto de que invoca, como veremos, el Teorema de Gödel para su definición de lo Real.

Los fragmentos de lógica matemática que se analizan en [Sokal y Bricmont] no están directamente relacionados con el Teorema de Gödel. Pero suministramos aquí algunos ejemplos adicionales que, creemos, son representativos de la clase de analogía que intenta Lacan con respecto al fenómeno de incompletitud. Las citas a continuación están tomadas del Seminario 16, *De un Otro al otro* (Clases V y VI) y del Seminario 19 (Clase VI). Recomendamos en todos los casos consultar los textos

completos, que por su extensión no podemos reproducir aquí. Remarcamos con negrita los pasajes que intentan establecer la analogía e intercalamos algunas observaciones.

Del Seminario 16, Clase V:

> Ir lo más lejos posible en la interrogación del campo del Otro como tal permite percibir su falla en una serie de diferentes niveles. **Para probarlo, las matemáticas nos ofrecen un campo de experiencia ejemplar**. Es que éstas pueden permitirse limitar el campo del Otro a funciones bien definidas, como, por ejemplo, la aritmética. Poco importa por ahora lo que esta investigación aritmética manifieste de hecho. Ustedes escucharon lo suficiente para saber que, en campos elegidos entre los más simples, la sorpresa es grande cuando descubrimos que falta, por ejemplo, la completitud, es decir, que no puede formularse que lo que sea que allí se enuncie deba o bien demostrarse o bien demostrarse que no.

(En realidad la condición de completitud sí puede formularse en el lenguaje de la aritmética, como probaremos en el próximo capítulo. Que «falte completitud», como él lo expresa, significa que existe algún enunciado tal que a partir de los axiomas del sistema no puede probarse ni el enunciado ni la negación del enunciado. Tanto la completitud de un sistema axiomático recursivo como la incompletitud pueden ser formuladas en primer orden en cualquier sistema, como la aritmética, en que «Ser demostrable» y «Ser fórmula» sean propiedades expresables y la operación lógica de negar una fórmula sea una función expresable).

> Más aún, en tal campo, entre los más simples, puede ponerse en discusión que algún enunciado sea demostrable. Aún se dibuja otro nivel, donde es demostrable que un enunciado no es demostrable.

(La primera frase, tal como está expresada, no tiene sentido. Quizá quiere decir que puede ponerse en discusión que todo enunciado verdadero sea demostrable. Cuando dice a continuación: «Aún se dibuja otro nivel, donde es demostrable que un enunciado no es demostrable» debería decir en realidad, «donde es demostrable que cierto enunciado *verdadero* no es demostrable (dentro del sistema)». Caso contrario es una afirmación trivial: es muy sencillo demostrar que un enunciado falso, como $1 + 1 = 3$, no es demostrable).

Y esto se vuelve muy singular y muy raro en ciertos casos, cuando lo no demostrable mismo escapa porque no puede siquiera sostenerse que no es demostrable, y se abre una dimensión distinta llamada lo no decidible.

(¿Qué significa aquí: que «no puede siquiera sostenerse que no es demostrable»? La demostración de Gödel de 1931, es lo que permite sostener que el enunciado «Yo no soy demostrable» es realmente no demostrable para el sistema axiomático. En realidad no se abre ninguna dimensión distinta: se llama indecidible (respecto a un sistema de axiomas) a un enunciado tal que ni él ni su negación pueden demostrarse a partir de esos axiomas. Y este concepto no es tan «raro» o infrecuente como parece sugerir Lacan con su gradación en «niveles». Para dar un ejemplo muy simple, pensemos en los cuatro axiomas del orden total que hemos dado en el Apéndice I:

(1) $\neg(x < x)$ (Prop. reflexiva)

(2) $x < y \rightarrow \neg(y < x)$ (Prop, antisimétrica)

(3) $(x < y \bigwedge y < z) \rightarrow x < z$ (Prop, transitiva)

(4) $x \neq y \rightarrow (x < y \bigvee y < x)$ (Orden total)

Y consideremos el axioma de «densidad», que dice que entre dos elementos distintos siempre hay uno intermedio:

(5) $x < y \rightarrow \exists z(x < z \bigwedge z < y)$ (Densidad)

Es muy fácil ver que este quinto axioma es indecidible respecto al sistema formado por los otros cuatro. Basta observar que existe un conjunto totalmente ordenado como los números racionales (las fracciones), donde se verifican los axiomas (1) a (4) y también (5) y que existe otro conjunto totalmente ordenado como los números enteros, donde se verifican los axiomas (1) a (4) y la *negación* del axioma (5). De esta manera, hemos demostrado y podemos «sostener» que el axioma (5) es indecidible para ese sistema).

Estas escalas no de incertidumbre, sino de defectos en la textura lógica, nos permiten aprehender el estatuto del sujeto como tal, encontrarle un apoyo y, para decirlo todo, concebir que se satisfaga con su adhesión a la falla misma situada en el nivel de la enunciación.

> Al abordar desde el exterior de la lógica el campo del Otro, aparentemente nunca nada nos impidió forjar el significante con el que se connota lo que falta en la articulación significante misma.

Lo que nos interesa señalar de estos fragmentos es, sobre todo, esta conclusión final, donde se intenta una primera analogía entre el fenómeno de incompletitud en la aritmética (lo que Lacan llama «defectos en la textura lógica») y «el estatuto del sujeto como tal», donde el enunciado indecidible de Gödel representaría «la falla misma situada en el nivel de la enunciación».

Esta clase de analogía se enfatiza todavía más (ya desde el título) en la sección siguiente del mismo seminario: *Hacia una práctica lógica en psicoanálisis*. Transcribimos también algunos fragmentos.

Del Seminario 16, Clase VI:

> De aquí en más me verán continuar esta búsqueda que consiste en atrapar por todas partes donde se presente la ocasión **isomorfismos entre el estatuto del sujeto y lo que desarrollan las disciplinas ya constituidas**. Se trata ahora de seguirla en el nivel de otra disciplina, **que nos permite señalar un isomorfismo que está desde el comienzo**, pero que también puede revelarse recubriendo una identidad de estofa, como ya señalé.
>
> ¿Cuál es esta disciplina? La llamaré práctica lógica.

(Sigue aquí un intento de exposición de los resultados de Gödel, con errores graves, que analizamos por separado en el Ejercicio 4.1.)

> […]
>
> ¿Qué encontramos en la experiencia de esta lógica matemática, sino justamente este residuo donde se designa la presencia del sujeto?
>
> […]
>
> **Lo que se revela aquí de falta revela sin duda la presencia del sujeto, pero sólo de ese sujeto que hizo el corte, ese que separa el denominado metalenguaje de cierto campo matemático —que es simplemente su discurso— de otro lenguaje aislado, de un lenguaje de artificio, del lenguaje formal.**

Lacan, así, cree encontrar «la presencia del sujeto» en la «falla» de la textura lógica que revelaría el Teorema de Gödel. Veremos un poco más adelante que Lyotard da

una explicación alternativa de esta situación a través de los llamados «juegos del lenguaje», en que los jugadores competentes de una disciplina se ponen de acuerdo sobre nuevas reglas.

Pero es quizás en el Seminario 19 donde la analogía se enuncia con más claridad.

Del Seminario 19, Clase VI (*El saber del psicoanalista*):

> **Si encontráramos en la lógica un medio de articular lo que el inconsciente demuestra de valores sexuales, no estaríamos sorprendidos**, quiero decir aquí mismo en mi seminario, es decir, **en la superficie de esta experiencia, el análisis, instituido por Freud, y de la cual se instaura una estructura de discurso que he definido**. Retomo lo que dije. En la densidad de mi primera frase he hablado de «valores» sexuales. Quiero hacer observar que esos valores son valores recibidos, recibidos en todo lenguaje: el hombre, la mujer, eso son lo que se denominan valores sexuales. Al comienzo, que haya el hombre y la mujer, es la tesis de donde parto hoy, es antes que nada asunto de lenguaje.
>
> […]
>
> Digo que, si el paso que nos ha hecho dar el análisis nos muestra, revela, en todo abordaje estrecho de la aproximación sexual, el desvío, la barrera, la marcha, el enredo, el desfiladero de la castración, está allí y con propiedad, lo que no puede realizarse más que a partir de la articulación tal como la he dado del discurso analítico, está allí lo que nos conduce a pensar que la castración no podría en ningún caso ser reducida a la anécdota, el accidente, la torpe intervención de un designio de amenaza, ni siquiera de censura. **La estructura es lógica**.
>
> Entonces, ya que está allí aquello de lo que toma sentido todo discurso, a saber, a partir de un otro, propongo bastante claramente desde hace suficiente tiempo para que baste recordarlo aquí: lo Real, la categoría que en la tríada de la que partió mi enseñanza, lo Simbólico, lo Imaginario y lo Real, **lo real se afirma por un efecto del que no es el mínimo el afirmarse en los impasses de la lógica**. Me explico: lo que al comienzo, en su ambición conquistadora, la lógica se proponía, no era nada menos que la malla del discurso en tanto se articula y al articularse, esta malla debía cerrarse en un universo supuesto encerrar y recubrir, como por una red, lo que podía haber de lo que era ofrecido al conocimiento. La experiencia, la experiencia lógica ha mostrado que

era diferente y sin tener aquí, hoy o por accidente tengo que desgañitarme, que entrar en el detalle, este público está de todos modos suficientemente advertido de dónde en nuestra época ha podido retomar el esfuerzo lógico para saber que al abordar algo en principio tan simplificado como real, como la aritmética, algo puede enunciarse siempre, ha podido ser demostrado que en la aritmética, algo puede enunciarse siempre, ofrecido o no ofrecido a la deducción lógica, que se articula como adelantado a aquello de lo que las premisas, los axiomas, los términos fundadores, de lo que puede apoyarse dicha aritmética, permite presumir como demostrable o refutable. **Allí palpamos en un dominio en apariencia el más seguro, lo que se opone al completo apresamiento del discurso, a la exhausión lógica, lo que introduce allí una abertura irreductible. Es allí que designamos lo real**.

[…]

Lo remarcable, en el desarrollo al que me refería hace un rato de la enunciación lógica, en donde tal vez algunos advirtieron que no se trata de otra cosa que del Teorema de Gödel concerniente a la aritmética, es que no es a partir de los valores de verdad que Gödel procede en su demostración de que habrá siempre en el campo de la aritmética algo enunciable en los términos propios que ella comporta, que no estará al alcance de lo que ella se plantea a sí misma como modo a considerar como recibido de la demostración. No es a partir de la verdad, es a partir de la noción de derivación, es dejando en suspenso el valor «verdadero o falso» como tal que el teorema es demostrable. **Lo que acentúa lo que digo de la abertura lógica en ese punto, punto vivo, punto vigoroso en lo que ilustra lo que creo avanzar, es que si lo real seguramente en un acceso fácil puede definirse como lo imposible, este imposible en tanto se comprueba de la toma misma del discurso, del discurso lógico, ese imposible, ese real debe ser privilegiado por nosotros. ¿Por nosotros quiénes? Los analistas. Pues de una manera ejemplar, es el paradigma de lo que pone en cuestión lo que puede salir del lenguaje**. Resulta un cierto tipo, que yo he definido, ese discurso como siendo lo que instaura un tipo de lazo social definido.

Pero el lenguaje se interroga sobre lo que él funda como discurso. Es sorprendente que no lo pueda hacer más que fomentando la sombra de un lenguaje que se superaría, que sería metalenguaje. A menudo hice observar que no lo puede hacer más que reduciéndose en su función, es decir, engendrando ya un discurso particularizado. **Propongo, al interesarnos en ese real, en tanto se afirma por la interrogación**

> **lógica del lenguaje, propongo encontrar allí el modelo de lo que nos interesa, a saber, de lo que entrega la exploración del inconsciente**, el que, lejos de ser, como ha pensado poder retomarlo Jung, regresando a los vestigios más viejos, lejos de ser un simbolismo sexual universal, es muy precisamente lo que he recordado hace un momento de la castración, subrayando solamente que es exigible que ésta no se reduzca a la anécdota de una palabra oída.

De acuerdo con estas exposiciones, la analogía se comportaría, básicamente, de este modo:

La experiencia del análisis instaura un discurso que podría articularse con una estructura lógica. Pero, tal como sucede en la aritmética, la textura lógica de ese discurso tiene «fallas». Esas «fallas» o «aberturas» lógicas deben ser privilegiadas por los analistas. Dentro de la analogía, en esas aberturas está «lo que puede salir del lenguaje» y se corresponden con la clase de enunciados que son, como el de Gödel, indecidibles dentro del sistema de la aritmética. Allí estaría el «modelo de lo que debe interesar a los analistas», «lo que entrega la exploración del inconsciente».

Ahora bien, esta clase de analogía (tal como sucede con el caso de Régis Debray) sólo parece tener en cuenta las semejanzas más superficiales e ignorar completamente las diferencias profundas.

A partir de la afirmación de que existe la posibilidad de dar cierta estructura lógica a un discurso, Lacan infiere que podrá encontrar dentro de ese discurso un fenómeno similar al de la incompletitud esencial de la aritmética. Pero para que esto tenga algún mínimo viso de probabilidad deberían darse una serie de condiciones que Lacan ni parece tomar en cuenta:

1. Es posible que la exploración del inconsciente permita cierta estructuración lógica parcial. Pero difícilmente esa estructura lógica tenga algo que ver con la lógica matemática.
2. La experiencia del análisis se lleva a cabo en un lenguaje que, como el mismo Lacan observa, está «esencialmente hecho del deslizamiento de la significación» y —podríamos agregar— no parece fácilmente reductible a un lenguaje formal, porque se manifiesta también a través de ambigüedades, equívocos, silencios, rodeos, alusiones, emotividad, vacilaciones, gestualidad. Sin embargo, aunque Lacan señala esta diferencia abismal, no parece preocuparle para establecer de todos modos su analogía.

3. Aun si pudieran superarse estos dos primeros obstáculos, hay una tercera cuestión crucial que Lacan ni siquiera se plantea: ¿Por qué «preferir» el sistema de la aritmética como modelo para la analogía?

   Aceptemos transitoriamente que se pudiera dar una estructura lógica al discurso en relación con el inconsciente, lo suficientemente precisa como para que tenga algún sentido una formalización matemática. ¿Por qué se parecería este sistema al de los números naturales con la suma y la multiplicación? ¿No sería más razonable, para modelar un discurso parcialmente lógico, pensar en estructuras matemáticas que representen operaciones lógicas, como las álgebras de Boole, o alguna variante de las álgebras asociadas a lógicas modales, como las que se eligen, por ejemplo, para modelar el discurso del Derecho?

   Este punto es fundamental porque de la elección del ejemplo matemático para la analogía puede seguirse tanto la clase de conclusión que imagina Lacan como la conclusión exactamente opuesta. En efecto, con la misma (falta de) argumentación de Lacan, se podría postular como modelo para la analogía, por ejemplo, la estructura de las álgebras de Boole que corresponden al cálculo proposicional (y que fueron desarrolladas, justamente, para modelar razonamientos). O bien, si por alguna razón misteriosa el inconsciente prefiere números, ¿por qué no elegir el sistema de los números complejos (que tiene incluso incorporada la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$ que Lacan identifica con el falo)? Y ahora, con estos modelos, ya no hay «fallas» en la textura lógica, porque las teorías de estos modelos son completas. ¿Cuál sería en todo caso la propiedad concreta e identificable que aparece en la exploración del inconsciente y que se invoca desde el *interior* de la teoría o la práctica psicoanalítica para que debamos elegir a favor de una de estas posibilidades y en contra de la otra?

4. A partir de la objeción anterior, aparece inmediatamente otra: dado que la analogía de Lacan pretende convertirse, por su propio énfasis, en algo así como una guía, o una inspiración para analistas concretos que exploran el inconsciente de personas también concretas, se debería poder dar una «hipótesis fundada» de que la estructura lógica del inconsciente de todas (o la mayoría de) las personas se corresponde con el sistema de la aritmética, antes que con cualquier otra estructura matemática. Pero ¿no parece más natural que «la experiencia del análisis» en personas distintas con distintas obsesiones, con distintos traumas, con distintas capacidades de verbalización, etcétera, den lugar a discursos del inconsciente con estructura lógica también distinta? Otra vez, ¿en qué clase de propiedad recurrente y generalizable, detectada en una variedad de múltiples y

paradigmáticos casos de exploración concreta del inconsciente, se basa Lacan para postular que esa estructura lógica será siempre (o en la mayor parte de los casos) similar a la de la aritmética?

5. Aceptemos de todos modos por un momento que hubiera alguna manera razonable de establecer la analogía y de justificarla de una manera general a favor de la aritmética (y contra todas las teorías completas de la matemática). Hay todavía otro punto en el que Lacan ni siquiera repara: el Teorema de Gödel tiene la forma lógica de una implicación:

   $$\text{Consistencia} \rightarrow \text{Incompletitud}$$

   Es decir, sólo bajo la hipótesis de consistencia del sistema se tiene que el enunciado de Gödel es indecidible para el sistema. (En el caso de que el sistema sea inconsistente, todo enunciado es trivialmente demostrable desde el interior del sistema). De manera que una condición «oculta» de la analogía es que pueda presumirse la consistencia del discurso lógico asociado a la exploración del inconsciente durante el análisis. ¿Quién podría imaginar un discurso *consistente*, sin ninguna contradicción, que pudiera surgir de la exploración del inconsciente a través del psicoanálisis?

6. Imaginemos que, aun así, pudieran superarse las objeciones 1 a 5 que hemos expuesto para que la analogía siga en pie. Hay todavía otra cuestión, más sutil, sobre la que Lacan tampoco reflexiona cuando llama a los analistas a privilegiar lo que «sale del lenguaje» en las «fallas» de la textura lógica. Lacan parece creer que lo verdaderamente importante en la exploración del inconsciente aparecerá a través de estas fallas. Sin embargo, los enunciados indecidibles en las teorías matemáticas no necesariamente son, dentro de la teoría, los más interesantes o «reveladores» desde el punto de vista matemático. Vale también que, inversamente, muchas preguntas que para los matemáticos en cierta área han sido las fundamentales, y aun las más difíciles de demostrar, finalmente *no son indecidibles*, sino que encuentran demostración dentro de las respectivas teorías. Un caso reciente es el llamado Último Teorema de Fermat. Este teorema, que permaneció como una conjetura durante más de trescientos años y que se resistió a los intentos de demostración de los más grandes matemáticos de distintas épocas, llevó al propio Gödel a especular que quizá se tratara de un enunciado indecidible. Sin embargo, en 1995 se dio finalmente una prueba.

   Queremos decir con esto que no necesariamente los enunciados indecidibles son los que resultan más «significativos» para una disciplina. Y que puede haber enunciados cruciales para una disciplina que

> permanecen abiertos, como conjeturas, por la dificultad de encontrar una demostración, pero que sí pueden obtener finalmente demostración dentro del sistema. De manera que el llamamiento de Lacan a los analistas para prestar atención sobre todo a las «fallas» y a lo que «se sale del lenguaje» puede correr este peligro: que para la exploración del inconsciente esas «fallas» no tengan finalmente tanta relevancia y que en esta búsqueda de «fallas» se dejen de lado o se pasen por alto otras revelaciones que quizá, no «se salen del lenguaje», pero que pueden ser tanto o más significativas, y tanto o más difíciles de detectar, sobre todo si el foco de la exploración está dirigido hacia otro lado.

Es muy probable que ante cualquiera de estas objeciones la reacción defensiva instantánea sea recordarnos que debemos entender esta analogía —que Lacan llega a llamar «isomorfismo»— sólo como una metáfora. Pero, tal como analiza Bouveresse en el caso de Régis Debray, el procedimiento para «hacer creer» a través de esa metáfora en particular no es inocente. Porque la «metáfora», muy claramente en este caso, sustituye por entero la fundamentación propia, que debería buscarse dentro de la disciplina. Y más aún, la «metáfora» tiene consecuencias en la práctica psicoanalítica, porque propone dirigir la disciplina y la exploración del inconsciente en un sentido antes que en otro. Si se analizan con cuidado los textos de Lacan sobre el Teorema de Gödel, veremos que la única fundamentación que proporciona para la analogía es la posibilidad de reconocer en la exploración del inconsciente un discurso con una cierta articulación lógica. Ni siquiera está claro el paso uno: que esa lógica tenga algo que ver con la lógica matemática que sirve de marco a la demostración de Gödel. Sin embargo, a partir de esta premisa y sólo con esto Lacan salta a la conclusión de que será posible encontrar en este discurso un fenómeno análogo al de la incompletitud de la aritmética. Pero como ya hemos visto, de esas mismas premisas se podría sostener igualmente la «metáfora» exactamente opuesta.

Ahora bien, una vez descartada la «metáfora», por arbitraria, ¿por qué debería perseguir un analista la búsqueda de la «falla» en el discurso? ¿Cómo asegurar ahora, sin la «metáfora», que efectivamente existirán estas «aberturas» y serán tan reveladoras como parece creer Lacan? ¿Qué queda finalmente, sin la «metáfora», de la tesis de Lacan? ¿Se debe creer en ella por un acto de fe?

Sokal y Bricmont analizan varios otros intentos de Lacan de aplicar conceptos matemáticos y concluyen:

> ¿Cómo hay que valorar las matemáticas lacanianas? Los comentaristas no han logrado ponerse de acuerdo sobre las intenciones de Lacan: ¿hasta qué punto intentaba «matematizar» el psicoanálisis? No podemos dar una respuesta definitiva a esta pregunta, cosa que, en último término, tiene escasa importancia, pues las «matemáticas» de

> Lacan son tan fantasiosas que no pueden desempeñar ninguna función útil en un análisis psicológico serio.
>
> No se puede negar que este autor tiene una vaga idea de las matemáticas a que alude. Pero sólo eso: vaga y poco más. […] Sin embargo, se supera, por decirlo de algún modo, en el segundo tipo de abuso que hemos mencionado en nuestra introducción: sus analogías entre el psiconálisis y las matemáticas alcanzan el *summum* de la arbitrariedad, y ni aquí ni a lo largo de toda su obra da la menor justificación empírica o conceptual de las mismas.
>
> Nos hallamos ante lo que se podría denominar «misticismo laico»: misticismo, porque el discurso intenta producir efectos mentales que no son puramente estéticos, pero sin apelar a la razón; laico, porque las referencias culturales (Kant, Hegel, Marx, Freud, matemáticas, literatura contemporánea, etcétera) no tienen nada que ver con las religiones tradicionales y son atractivas para el lector moderno. Por lo demás, los escritos de Lacan adquirieron, con el tiempo, un carácter cada vez más críptico —característica común de muchos textos sagrados—, combinando los juegos de palabras y la sintaxis fracturada, y sirviendo de base para la exégesis reverente de sus discípulos. Es, pues, legítimo preguntarse si no estamos, al fin y al cabo, en presencia de una nueva religión.

Después de analizar estos intentos de extrapolación del Teorema de Gödel a otras disciplinas, es tentador acompañar la reflexión escéptica de Sokal y Bricmont:

> ¿No sería hermoso (precisamente para nosotros, matemáticos y físicos) que el Teorema de Gödel o la Teoría de la Relatividad tuvieran inmediatas y profundas consecuencias para el estudio de la sociedad? ¿O que el axioma de elección pudiera utilizarse para estudiar la poesía? ¿O que la topología tuviera algo que ver con la psique humana? Pero por desgracia no es ése el caso.

Sin embargo, nuestro punto de vista es diferente. La selección de textos de Sokal y Bricmont muestra sólo que *estos* autores tomaron las analogías demasiado a la ligera. Y que, sobre todo, no se ocuparon de comprender con más profundidad el Teorema de Gödel antes de ensayar sus extrapolaciones. Pero no nos parece de ningún modo imposible que el Teorema de Gödel y los temas asociados con él —la diferencia entre lenguaje y metalenguaje, las nociones de consistencia y completitud, la formalización de una teoría de la demostración, los problemas del infinito, la codificación de un lenguaje por medio de relaciones algebraicas— puedan tener resonancias interesantes

en otras disciplinas. Y que *otros* autores, con más seriedad, encuentren inspiración en el Teorema de Gödel para establecer analogías que vayan más allá de la dudosa «metáfora». Nosotros creemos que los teoremas de Gödel y el fenómeno de incompletitud dicen algo en términos epistemológicos y filosóficos que trasciende la matemática, y gran parte, si no toda, la decisión de escribir este libro es, justamente, dar a conocer de una manera rigurosa los teoremas *fuera* de la matemática, para círculos de pensamiento lo más amplios posibles, con la esperanza de que futuros autores de otras disciplinas, que no sean matemáticos ni físicos, puedan encontrar una exposición hospitalaria antes que una puerta cerrada.

Otra investigación profunda y rigurosa, sobre las conexiones del pensamiento posmoderno con algunos de los problemas de los fundamentos de la matemática, puede encontrarse en la obra *Una lectura matemática del pensamiento posmoderno*, del matemático Vladimir Tasic. (Véase [Tasic].) Allí se analiza el *affaire* Sokal y, sin dejar de lado la justa crítica a los excesos de estos pensadores «posmodernos», se intenta prestar también atención al germen de verdad que puedan tener algunas de sus afirmaciones.

§ 6. Jean-François lyotard: Gödel y la condición posmoderna

Para terminar este capítulo en el mismo rapto optimista, transcribimos ahora un fragmento de *La condición postmoderna*, de Jean-François Lyotard, donde se expone una relación que nos parece acertada entre el Teorema de Gödel y los juegos de lenguaje de Wittgenstein. Lyotard es también uno de los autores criticados con dureza en [Sokal y Bricmont] por la manera sesgada de «elegir» y mezclar ejemplos de la física, en ese mismo libro, para anunciar «una ciencia posmoderna como búsqueda de las inestabilidades» y postular la tesis de que la naturaleza misma de la ciencia ha cambiado. Sin embargo, la discusión de Lyotard sobre las consecuencias epistemológicas del Teorema de Gödel nos parece que describe bastante bien el desarrollo de la matemática en relación con los enunciados indecidibles. Hay, por ejemplo, una multitud de resultados en matemática que sólo valen bajo la hipótesis generalizada del continuo (véase el Apéndice I). Y podría considerarse que los matemáticos que asumen como verdadera esta hipótesis en sus teoremas, forman parte de esa comunidad de jugadores expertos que introducen una nueva regla en la que están todos de acuerdo.

> Una cuestión más pertinente para la legitimación es: ¿por medio de qué criterios define el lógico las propiedades requeridas por una axiomática? ¿Existe un modelo de lengua científica? ¿Ese modelo es único? ¿Es verificable? Las propiedades requeridas en general por la sintaxis de un sistema formal son la consistencia (por ejemplo, un

sistema no consistente con respecto a la negación admitiría en sí paralelamente una proposición y su contraria), la completitud sintáctica (el sistema pierde su consistencia si se le añade un axioma) [se desliza aquí un error en la definición de completitud], la decidibilidad (existe un procedimiento efectivo que permite decidir si una proposición cualquiera pertence o no al sistema), y la independencia de axiomas unos con respecto a otros. Pues bien, Gödel ha establecido de modo efectivo la existencia, en el sistema aritmético, de una proposición que no es ni demostrable ni refutable en el sistema; lo que entraña que el sistema aritmético no satisface la condición de completitud.

Puesto que se puede generalizar esta propiedad, es preciso, por tanto, reconocer que existen limitaciones internas a los formalismos. Esas limitaciones significan que, para el lógico, la metalengua utilizada para describir un lenguaje artificial (axiomática) es la «lengua natural» o «lengua cotidiana»; esta lengua es universal, puesto que todas las demás lenguas se dejan traducir a ella; pero no es consistente con respecto a la negación: permite la formación de paradojas.

A causa de esto, la cuestión de la legitimación del saber se plantea de otro modo. Cuando se declara que un enunciado de carácter denotativo es verdadero, se presupone que el sistema axiomático en el cual es decidible y demostrable ha sido formulado, es conocido por los interlocutores y aceptado por ellos como tan formalmente satisfactorio como sea posible. Es en este espíritu donde se ha desarrollado, por ejemplo, la matemática del grupo Bourbaki. Pero otras ciencias pueden hacer observaciones análogas: deben su estatuto a la existencia de un lenguaje cuyas reglas de funcionamiento no pueden ser demostradas, sino que son objeto de un consenso entre los expertos. Esas reglas son exigidas al menos por ciertos de ellos. La exigencia es una modalidad de la prescripción.

La argumentación exigible para la aceptación de un enunciado científico está, pues, subordinada a una «primera aceptación» (en realidad constantemente renovada en virtud del principio de recursividad) de las reglas que fijan los medios de la argumentación. De ahí dos propiedades destacables de ese saber: la flexibilidad de sus medios, es decir, la multiplicidad de sus lenguajes; su carácter de juego programático, la aceptabilidad de las «jugadas» que se hacen (la introducción de nuevas proposiciones) que depende de un contrato establecido entre los «compañeros». De ahí también la diferencia entre dos tipos de «progreso» en el saber: uno correspondiente a una nueva

jugada (nueva argumentación) en el marco de reglas establecidas, otro a la investigación de nuevas reglas y, por lo tanto, a un cambio de juego.

A esta nueva disposición corresponde, evidentemente, un desplazamiento de la idea de la razón. El principio de un metalenguaje universal es reemplazado por el de una pluralidad de sistemas formales y axiomáticos capaces de argumentar enunciados denotativos, esos sistemas que están descritos en un metalenguaje universal, pero no consistente. Lo que pasaba por paradoja, o incluso por paralogismo, en el saber de la ciencia clásica y moderna, puede encontrar en uno de esos sistemas una fuerza de convicción nueva y obtener el asentimiento de la comunidad de expertos.

El método para los juegos de lenguaje que hemos seguido aquí se considera modestamente incluido dentro de esa corriente de pensamiento.

§ 7. Ejercicios

Ejercicio 4.1: Discutir la siguiente exposición de Lacan sobre el Teorema de Gödel y las observaciones que intercalamos:

> ¿Qué más tentador para la lógica que las matemáticas, donde el discurso demostrativo parecía asentado en una entera autonomía respecto de lo que se llama experiencia? Pudo parecer, en efecto, que este discurso no sostenía su certeza más que por sí mismo, a saber, por las exigencias de coherencia que él se imponía.
>
> […]
>
> ¿Qué ocurre en matemática con el uso del formalismo?
>
> Se ha dicho que el discurso matemático no tiene sentido y que nunca se sabe si lo que se dice en él es verdad. Fórmula extrema, paradójica, que repetía Kojéve, sin hacer más que retomarla de boca de Bertrand Russell, que —recordemos— es uno de los iniciadores de la formalización lógica de este discurso, es decir, que ella no viene de afuera. El formalismo en matemática es la tentativa de someter este discurso a una prueba que podríamos definir en estos términos —asegurarse de que luzca bien, es decir, que funcione sin el sujeto—. Para que lo perciban rápidamente quienes no entienden de inmediato lo que designo allí, pregúntense quién hablaría alguna vez, en cuanto a lo que se asegura como una construcción matemática, de una incidencia

> cualquiera de lo que en otra parte se destaca como el *observador*. No hay en matemática huella concebible de lo que se llama *error subjetivo*. […] No hay término medio —o los términos del discurso son exactos, irrefutables, o no lo son—. […]
>
> Lo cierto es que sin embargo está el matemático. Como dije de inmediato, formalizar este discurso consiste en asegurarse de que se sostiene solo, aun completamente evaporado el matemático. Esto implica la construcción de un lenguaje que es precisamente lo que se llama lógica matemática, y que sería mejor llamar práctica de la lógica, o práctica lógica sobre el campo matemático. La condición para realizar esta prueba se presenta bajo una forma doble y que puede parecer antinómica.
>
> Primera condición, un lenguaje sin equívoco. Acabo de recordarles el carácter sin equívoco del discurso matemático. El lenguaje lógico no parece tener más trabajo que el de reforzarlo, refinarlo.
>
> […]
>
> Es una excelente oportunidad para destacar que, por el contrario, forma parte de la naturaleza del discurso fundamental no sólo ser equívoco, sino estar esencialmente hecho del deslizamiento, bajo todo discurso, de la significación. Se trata de algo que destaco desde que comencé a referirme al lenguaje.
>
> […]
>
> La segunda condición es que este lenguaje debe ser pura escritura. Nada de lo que le concierne debe constituir más que interpretaciones. Toda la estructura —entiendo, lo que se podría atribuir al objeto— produce esta escritura.
>
> La consistencia de un sistema significa que, cuando enuncian en él una proposición, pueden decir sí o no, es admisible, es un teorema, como se dice, del sistema, o bien, no lo es y es su negación la que lo es, si uno cree que debe tomarse el trabajo de hacer teorema de todo lo que se plantea allí como negativo.

Confunde aquí consistencia con completitud. Y la frase «si uno cree que debe tomarse el trabajo…» no tiene ningún sentido matemático (ni de ningún tipo).

> […]
>
> El progreso de la práctica lógica ha permitido asegurar resultados inéditos, pero sólo gracias al uso de procedimientos de formalización, que consisten en hacer dos columnas, si puedo decir así. En una se pone

> lo que se enuncia del discurso inaugural de la matemática y en la otra, el otro discurso, que está sometido a la doble condición de perseguir el equívoco y reducirse a una pura escritura. El discurso inaugural es ese en el que la matemática ha hecho intrépidamente todos sus progresos, y, cosa curiosa, sin tener que volver allí cada tanto anulando el saber adquirido generalmente admitido en las épocas precedentes.

Esto último no es tan curioso, sino que depende, entre otras cosas, de haber establecido un lenguaje riguroso, definiciones con alcances precisos y reglas declaradas y explícitas para las demostraciones.

> En oposición a éste, el segundo discurso se destaca por el término *metalenguaje*, de manera muy impropia a mi gusto, porque es sólo un campo cerrado que una práctica aísla en lo que es simplemente el lenguaje, el lenguaje mismo sin el cual el discurso matemático no sería propiamente enunciable. No de manera menos impropia se habla de *lenguaje* formal.

En realidad, al introducir un lenguaje formal, con todos los recaudos de precisión, no ambigüedad, recursividad, etcétera, tal como lo hicimos en el capítulo 3, este lenguaje formal se vuelve a su vez objeto posible de investigación matemática. Esto es lo que establece la distinción entre lo que este lenguaje formal puede expresar sobre ciertos objetos matemáticos y el metalenguaje, lo que se puede decir desde un discurso matemático general (lo que Lacan llama «discurso inaugural») sobre los alcances y características de los sistemas formales. Por supuesto que en cierto sentido tanto el «discurso inaugural» de la matemática como los posibles lenguajes formales son «campos cerrados» o sublenguajes del «lenguaje mismo». Pero ése no es el punto: Lacan no parece entender aquí que la utilización del término «metalenguaje» no tiene en matemática el sentido de un lenguaje «más allá del lenguaje mismo» sino esta acepción mucho más modesta en que el discurso matemático se ejerce sobre un objeto que es también un lenguaje. Por ejemplo: la demostración de Gödel de que su enunciado es verdadero se efectúa en el metalenguaje, ya que la noción de «verdad» que definimos en el capítulo 3 no puede expresarse en el lenguaje formal que dimos para la aritmética.

> A partir de la distinción del discurso inaugural y del metalenguaje, Gödel muestra que la supuesta consistencia del sistema en apariencia más seguro del campo matemático, el discurso aritmético, implica lo que lo limita, a saber, la incompletitud.
>
> […]

> Segundo tiempo, segundo teorema. Aquí debo abreviar. No sólo el sistema aritmético no puede asegurar su consistencia por sí mismo más que constituyendo su incompletitud, sino que en la hipótesis, incluso fundada de su consistencia, no puede demostrar esta consistencia en su propio interior.

Se desliza aquí otro error, en la frase: «No sólo el sistema aritmético no puede asegurar su consistencia por sí mismo *más que constituyendo su incompletitud*, sino…». Se desprendería de aquí que el sistema sí podría asegurar su consistencia «constituyendo su incompletitud», lo que es falso. En realidad, no hay manera de que el sistema aritmético pueda asegurar su consistencia por sí mismo (que es lo que finalmente dice la segunda parte de la frase).

La frase debería decir: «No sólo el sistema aritmético, bajo la hipótesis de su consistencia, es incompleto (Primer Teorema de Gödel sobre Incompletitud), sino que esta propiedad de consistencia, incluso aunque esté fundada, no puede demostrarse en su interior (Segundo Teorema de Gödel sobre Consistencia)».

En efecto, la consistencia de la aritmética está históricamente fundada en el hecho de que no han aparecido contradicciones ni paradojas en su larga práctica, a tal punto que fue la rama de la matemática elegida para fundamentar la totalidad de la matemática. Aun así, la consistencia no puede demostrarse en el interior de la aritmética.

SEGUNDA PARTE

La demostración de los teoremas

HOJA DE RUTA

LA CONCATENACIÓN Y EL TEOREMA DE INCOMPLETITUD

Si hay una concatenación expresable, valen los teoremas de Gödel.

En los capítulos que siguen daremos la demostración de los teoremas de Gödel. En vez de seguir la demostración original de Gödel de 1931, preferimos dar una versión alternativa a partir de ideas de W. V. O. Quine, en su trabajo de 1946 *Concatenation as a Basis for Arithmetic* [Quine]. En nuestro desarrollo hay también puntos de contacto con la exposición de Raymond Smullyan en su libro *Gödel vs Incompleteness Theorems* [Smullyan].

La demostración que daremos tiene (creemos) el mínimo posible de tecnicismos matemáticos. Pero nuestro propósito principal, al elegir este camino, es capturar el hecho fundamental detrás de la argumentación de Gödel: la posibilidad de definir en el lenguaje de la aritmética una operación de *concatenación*, que refleja la manera en que se unen los símbolos del lenguaje para formar palabras.

En realidad, como veremos en los capítulos 5 y 6, el Teorema de Gödel —tanto en su versión semántica como en su versión generalizada— puede demostrarse a partir de las siguientes dos hipótesis:

Hipótesis 1: Hay una concatenación expresable en el lenguaje de la aritmética.

Hipótesis 2: Toda propiedad recursiva es expresable en el lenguaje de la aritmética.

Pero en verdad, como probaremos en el capítulo 8, la segunda hipótesis se deduce de la primera. De modo que el hecho crucial que habilita toda la argumentación para formular y exhibir un enunciado indecidible es *la posibilidad de definir una concatenación*.

Si hay una concatenación expresable, valen los teoremas de Gödel.

La demostración seguirá la siguiente hoja de ruta:

En el capítulo 5 definiremos una concatenación muy simple sobre la base de dos símbolos y supondremos:

1. Que esta concatenación es expresable en el lenguaje de la aritmética.
2. Que toda propiedad recursiva es expresable en el lenguaje de la aritmética.

Bajo estas dos suposiciones daremos (en el mismo capítulo 5) la demostración de la versión semántica del Teorema de Gödel y (en el capítulo 6) la demostración de la versión general del Teorema de Gödel.

En el capítulo 7 probaremos que la concatenación propuesta verdaderamente es expresable en el lenguaje de la aritmética.

En el capítulo 8 probaremos que la condición 1 implica la condición 2. Mostraremos en realidad que toda propiedad recursiva puede expresarse a partir de la concatenación que hemos definido. Como esta concatenación es expresable en el lenguaje de la aritmética, también toda propiedad recursiva resulta expresable en el lenguaje de la aritmética. Esto terminará por completo la demostración de los teoremas de Gödel.

Finalmente, en el capítulo 9 damos una definición abstracta de la noción de concatenación que nos permitirá probar otros resultados de incompletitud para teorías muy diversas y no necesariamente relacionadas con la aritmética.

CAPÍTULO CINCO

La versión semántica del Teorema de Incompletitud

La concatenación con punto y raya. Método de autorreferencia. «Ser verdadero» no es expresable.

> No sólo hemos sido las primeras personas que han encontrado un agujero negro, también hemos sido los primeros en utilizarlo para comunicarnos. […] He arrojado pedruscos a intervalos regulares […] Lo que registrarán será: punto-punto-punto-raya-raya-raya-punto-punto-punto, y así sucesivamente.
>
> ISAAC ASIMOV
> *Un sistema anticuado*

§ 1. La concatenación con punto y raya

En este capítulo demostraremos el Teorema de Incompletitud de Gödel en su versión semántica. Tal como anunciamos, nos proponemos mostrar el papel central que tiene en el fenómeno de incompletitud una operación a la que llamaremos *concatenación*.

Vamos a reescribir a los números naturales usando solamente dos dígitos (ambos distintos de cero), a los que llamaremos «raya» y «punto» (– y ●), como si se tratara del código Morse. *Concatenar* dos números escritos con rayas y puntos consistirá simplemente en escribir el segundo a continuación del primero. Si los números son, por ejemplo, –––● y ●–, la concatenación nos dará –––●●–.

Veremos que toda la argumentación de los teoremas de Gödel, tanto para la versión semántica como para la versión generalizada, puede desarrollarse a partir de las siguientes dos hipótesis:

Hipótesis 1: La concatenación es expresable en el lenguaje formal.

Hipótesis 2: Toda propiedad recursiva es expresable en el lenguaje formal. (Recordemos que una propiedad es *recursiva* si la verificación de esa propiedad puede hacerse con un procedimiento mecánico, en una cantidad finita de pasos).

En realidad, puede probarse que la Hipótesis 2 se deduce de la Hipótesis 1, pero como esta demostración es muy larga, la haremos por separado en el capítulo 8.

La demostración que desarrollaremos es *constructiva*, en el sentido de que exhibiremos y escribiremos efectivamente un enunciado verdadero y no demostrable. Puede verse en sí misma como un procedimiento, la aplicación de una receta que, a partir de una axiomatización recursiva para la aritmética dada por fórmulas

verdaderas, permite obtener un enunciado verdadero pero no demostrable para esa axiomatización.

El enunciado G dependerá así de la axiomatización que nos hayan dado (porque, por supuesto, un enunciado que no es demostrable a partir de ciertos axiomas, podría ser demostrado a partir de otros).

Los elementos fundamentales para escribir enunciados son los símbolos del lenguaje formal que, para el caso de la aritmética, recordemos, son los siguientes:

$$S \quad 0 \quad + \quad \cdot \quad = \quad v \quad \mid \quad \forall \quad \neg \quad \rightarrow \quad (\quad)$$

Agregamos ahora el símbolo #, que servirá para expresar *sucesiones de expresiones*. El símbolo # indica dónde empieza y dónde termina la sucesión y además separa entre sí a las expresiones que la forman.

El lenguaje de la aritmética está, en principio, pensado y diseñado para hablar de números. Puede referirse, entre otras cosas, a operaciones entre números (puede decir, por ejemplo, que «Dos más dos es cuatro» o «Tres por cinco no es doce»), o a relaciones entre números (puede decir que «Doce es múltiplo de tres»). Una idea central en la demostración del Teorema de Gödel es lograr que ese mismo lenguaje hable también de fórmulas y de demostraciones, y que sea capaz de decir, por ejemplo, que cierta fórmula es demostrable.

¿Cómo pudo Gödel «hacer hablar» a la matemática de sí misma? La idea clave es asignar a cada sucesión finita de símbolos un número, de la misma manera que en un supermercado a cada producto se le asigna un código de barras.

En efecto, cuando compramos un frasco de mermelada, la etiqueta tiene un código impreso de algo más de una decena de dígitos, por ejemplo 7793360004308. En la etiqueta leemos «mermelada de frutilla», pero al pasar el frasco frente a un lector láser, la computadora lee «7793360004308». De igual manera, a cada sucesión finita de símbolos le asignaremos un número identificatorio, que llamaremos indistintamente su *número de Gödel*, o su *código*. Para esto, elegimos dos dígitos distintos de 0, por ejemplo, el 1 y el 2 (o el 3 y el 5, o cualquier otro par de números).**[8]** Como los dígitos elegidos pueden ser cualesquiera, para mayor generalidad los llamaremos, como dijimos al principio, – y • (raya y punto). Nos quedaremos solamente con los números que pueden ser formados por concatenación a partir de esos dos dígitos. No *todos* los números se escribirán a partir de esos dos dígitos. Pero esto no importa: tendremos igualmente bastantes para codificar todas las expresiones. Lo único que en realidad precisaremos es que la propiedad «Ser escrito con raya y punto» sea traducible al lenguaje formal.

Una vez hecha la elección de quiénes son raya y punto, el Cuadro 1 muestra cómo se asignan los códigos para los símbolos del lenguaje.

Cuadro 1: números de Gödel de los símbolos del lenguaje

Símbolo	Número	Abreviatura
0	−●	1●
S	−−●	2●
+	−−−●	3●
·	−−−−●	4●
=	−−−−−●	5●
v	−−−−−−●	6●
|	−−−−−−−●	7●
∀	−−−−−−−−●	8●
¬	−−−−−−−−−●	9●
→	−−−−−−−−−−●	10●
(	−−−−−−−−−−−●	11●
)	−−−−−−−−−−−−●	12●
#	−−−−−−−−−−−−−●	13●

Como a «S» le corresponde el código −−● y a «0» le corresponde el código −● entonces a «SS0» le corresponde, por concatenación, el código: −−●−−●−●.

Al enunciado «S0 + S0 = SS0» (que significa «Uno más uno es igual a dos») le corresponde el número de Gödel 2● 1● 3● 2● 1● 5● 2● 2● 1● (estamos usando aquí los símbolos abreviados que aparecen en la tercera columna del Cuadro 1).

A partir de la asignación de códigos a los símbolos, es claro que puede asignarse un número de Gödel a cada una de las expresiones del lenguaje formal (y en particular a cada una de las fórmulas).

Consideremos ahora la *sucesión* de expresiones # (0 = 0) # S0 = S0 # (formada por los dos enunciados «Cero es igual a cero» y «Uno es igual a uno»). A esta sucesión le corresponde el número de Gödel que se obtiene así: comienza con 13● (el código del símbolo #), sigue con el código del primer enunciado de la sucesión, luego se escribe otra vez 13●, a continuación el código del segundo enunciado de la sucesión, y termina con 13●.

Escribiremos en adelante *nm* para la concatenación del número *n* con el número m. Si n_1 es el código (escrito con puntos y rayas) de la expresión E_1, n_2 es el código de la expresión E_2 así sucesivamente, entonces el número de Gödel de la sucesión # E_1 # E_2 #, …, # E_k # es:

13● n_1 13● n_2 13● … 13● n_k 13●

A cada sucesión de fórmulas le corresponde, de esta manera, un número de Gödel, y como las demostraciones formales son, ellas mismas, sucesiones de fórmulas, entonces *a cada demostración le corresponde un número de Gödel*

Verifiquemos ahora que las propiedades «Ser el código de una fórmula» y «Ser el código de una demostración» son ambas recursivas. Para esto deberíamos mostrar un programa que reconozca en una cantidad finita de pasos si un número cualquiera es, o no es, el número de Gödel de una fórmula. Y otro que verifique si un número cualquiera es o no el número de Gödel de una demostración.

En ambos casos, el programa debe comprobar primero que el número que le han ingresado es realmente el número de Gödel de una sucesión de símbolos. Para esto, debe verificar que esté escrito únicamente con los dígitos llamados punto y raya, que comienza con una raya, que termina con un punto y que no tiene dos puntos consecutivos ni tampoco más de trece rayas consecutivas. Si alguna de estas condiciones falla entonces no se trata del número de Gödel de una secuencia de símbolos y, obviamente, tampoco será el de una fórmula, o el de una demostración.

Si el número sí es el código de una sucesión de símbolos, entonces el programa lo transforma en símbolos del lenguaje formal (es decir, donde dice $\underline{1}$● pone 0, donde dice $\underline{2}$● pone S y así sucesivamente). A partir de aquí puede escribirse fácilmente tanto el programa que verifique si la secuencia de símbolos es una fórmula (véase el Ejercicio 3.1) como el programa que verifique si la secuencia de símbolos es una demostración (véase el Ejercicio 1.4).

Una propiedad crucial de la concatenación que no debe pasar inadvertida, y que es implícitamente usada en el razonamiento que acabamos de hacer, es la propiedad de *unicidad de escritura*: cuando un número se escribe como concatenación de puntos y rayas, esta escritura es única, y esta unicidad involucra tanto a los símbolos que aparecen como al orden en que estos símbolos están escritos.

Para entender la importancia de esta propiedad, supongamos que − fuera el dígito 1 y que ● fuera el 2, pero que en lugar de concatenar los dígitos eligiéramos sumarlos. Bajo estas condiciones, el número 3 admitiría tres escrituras posibles:

$$3 = 1 + 1 + 1$$
$$3 = 1 + 2$$
$$3 = 2 + 1$$

En consecuencia 3 tendría tres escrituras diferentes como puntos y rayas:

3 = −−−
3 = −●
3 = ●−

La secuencia −● corresponde al símbolo 0, pero las otras dos secuencias no corresponden a ningún símbolo del lenguaje. Si al programa que describimos antes le

ingresamos el número 3 y le pedimos que compruebe si es el número de Gödel de una sucesión de símbolos, ¿debe traducirlo al lenguaje formal como el símbolo 0 o debe decir que no corresponde a ningún símbolo? Vemos así que la falta de unicidad en la escritura provoca una ambigüedad inaceptable, que se evita al utilizar la concatenación de puntos y rayas.

Esta propiedad clave de la concatenación reaparecerá en el capítulo 9, cuando demos una definición más general de esta operación.

Dado que la expresión «*y* es el número de Gödel de una fórmula», que sintetizamos como «Form(*y*)» y la expresión «*x* es el número de Gödel de una demostración», que sintetizamos como «Dem(*x*)», definen ambas propiedades recursivas, por la Hipótesis 2 que asumimos al principio del capítulo, estas dos propiedades pueden ser traducidas al lenguaje formal.

Consideremos ahora la expresión «*x* es el código de una demostración de la fórmula cuyo código es *y*». Observemos que en realidad esta expresión equivale a la conjunción de las siguientes condiciones:

«*y* es el código de una fórmula»

«*x* es el código de una demostración»

«la escritura de *x* termina con $\underline{13}\bullet$ *y* $\underline{13}\bullet$». (Es decir, *y* es el código de la última fórmula de la demostración).

Podemos escribir entonces esta condición a partir de la concatenación de esta manera:

$$\mathrm{Form}(y) \bigwedge \mathrm{Dem}(x) \bigwedge \exists w(x = w\,\underline{13}\bullet\, y\,\underline{13}\bullet)$$

Abreviaremos la expresión «*x* es el código de una demostración de la fórmula de código *y*» como «*x* Dem *y*».

Observemos aquí que «*x* Dem *y*» es una relación *numérica* entre los *números x* e *y*. Sin embargo, puede interpretarse, gracias a la codificación, como una expresión sobre *fórmulas*, una afirmación que se refiere a propiedades del *lenguaje* y que dice «La fórmula cuyo código es *y* es demostrada por la sucesión de fórmulas cuyo código (como sucesión) es *x*».

En adelante, aunque no se mencione expresamente, siempre tendremos presente esta dualidad, y las expresiones matemáticas obtenidas a partir de la codificación de Gödel deben ser leídas en «traducción simultánea» como expresiones sobre el lenguaje y sus fórmulas.

Así, por ejemplo, a partir de la relación numérica «*x* Dem *y*» podemos expresar también en el lenguaje formal «∃*x*(*x* Dem *y*)», que significa «Existe una demostración

de la fórmula de código *y*», o bien, dicho de otro modo: «*y* es el código de una fórmula demostrable».

Anteponemos ahora el símbolo de negación a esta fórmula y consideramos la expresión

$$\neg\exists x(x \text{ Dem } y)$$

Observemos que, hablando estrictamente, esta fórmula es una disyunción, porque se niega una *conjunción* de condiciones. Esta disyunción puede expresarse así: O bien *y* no es el código de una fórmula, o bien, si *y* es el código de una fórmula, esta fórmula no es demostrable. Ahora bien, si nos aseguramos de reemplazar a la variable *y* por *códigos de fórmulas*, esta expresión dirá: «La fórmula de código *y* no es demostrable». En lo sucesivo nos cuidaremos de reemplazar la variable *y* únicamente por códigos de fórmulas para mantener este significado.

§ 2. MÉTODO DE AUTORREFERENCIA

Para completar la demostración del Teorema de Gödel necesitamos una herramienta que nos permita considerar enunciados *autorreferentes*, es decir, enunciados que aludan a propiedades de sí mismos. Observemos que hasta ahora la expresión «$\neg\exists x(x \text{ Dem } y)$», cuando reemplazamos *y* por código de fórmulas, nos permite decir «La fórmula de código *y* no es demostrable». La autorreferencia nos dará un enunciado que diga «*Yo* soy un enunciado no demostrable». Para esto consideraremos una función d(*x*), llamada *función diagonal*, cuya definición es la siguiente:

> Si *n* es el código de una fórmula P(*x*), con *x* como variable libre, entonces d(*n*) es el código del enunciado que se obtiene al reemplazar esa variable por el numeral **n**. (Observemos que tanto *n* como d(*n*) estarán escritos con puntos y rayas).

Esta función nos permite, para cualquier propiedad P expresable, pasar de la expresión «*x* cumple la propiedad P» a la expresión *«Mi número de Gödel* cumple la propiedad P».

En efecto, llamemos *n* al código de la expresión «d(*x*) cumple la propiedad P». Por definición de la función diagonal, d(*n*) es el código del enunciado que se obtiene al reemplazar *x* por **n**. Pero este enunciado es «d(*n*) cumple la propiedad P» y, en consecuencia, se refiere a su propio código y dice «Mi número de Gödel cumple la propiedad P».

Esto nos da un método para obtener expresiones autorreferentes. Por ejemplo, tomemos la propiedad «Ser un número primo». Si n es el código de «d(x) es un número primo» entonces al reemplazar x por **n** obtenemos un enunciado que dice «Mi número de Gödel es primo» (por supuesto, este enunciado puede ser verdadero, o falso).

Si n es el código de la expresión «d(x) es el código de un axioma» entonces al reemplazar x por **n** obtenemos un enunciado que afirma «Mi código es el de un axioma», que equivale a decir «Yo soy un axioma».

Si n es el código de la expresión «d(x) es el código de uno de los axiomas de Peano» entonces al reemplazar x por **n** obtenemos un enunciado que dice «Mi código es el de uno de los axiomas de Peano», que equivale a «Yo soy uno de los axiomas de Peano».

Para que este método sea válido, la función diagonal debe ser traducible al lenguaje formal (ya que sólo las expresiones traducibles admiten números de Gödel).

La definición de *propiedad recursiva* puede extenderse a las funciones. Diremos que una función de una variable es *recursiva* si existe un procedimiento mecánico que, dado cualquier número n, permite calcular en una cantidad finita de pasos el valor de la función en n. Por ejemplo, la función que calcula el doble de un número es recursiva y también es recursiva la función que para cada número calcula la suma de sus divisores.

La función d(x) es recursiva ya que existe un programa que, cada vez que se le ingresa un número n, primero verifica en una cantidad finita de pasos si se trata del número de Gödel de una fórmula con una variable libre y, en caso de que sea así, calcula en una cantidad finita de pasos el valor de d(n).

En efecto, el valor de d(n) solamente está definido si n es el número de Gödel de una fórmula con una única variable libre. El programa debe entonces verificar que n cumple esta condición (como vimos en el capítulo 3, esa verificación puede hacerse mediante una inspección dígito a dígito), luego reemplaza cada aparición libre de la variable por el numeral **n** de n y finalmente calcula el código de Gödel de la expresión así obtenida.

Por la Hipótesis 2 del principio del capítulo, la expresión «$z = \mathrm{d}(x)$» puede traducirse entonces al lenguaje formal y en consecuencia, también puede traducirse la expresión «$z = \mathrm{d}(x)$ y z cumple la propiedad P», pues se obtiene de aplicar un conectivo lógico a dos expresiones que ya sabemos que son traducibles. Reemplazando z por d(x) podemos abreviar la expresión como «d(x) cumple la propiedad P», que es entonces traducible por una fórmula del lenguaje formal.

Llamemos ahora n al número de Gödel de «$\neg\exists x(x \,\mathrm{Dem}\, \mathrm{d}(y))$». Como n es el código de una fórmula, d(n) también es el código de una fórmula. Por lo tanto, el enunciado

$$\text{G: } \neg\exists x(x \,\mathrm{Dem}\, \mathrm{d}(\mathbf{n}))$$

dice que el enunciado de código d(**n**) no es demostrable. Por el método de autorreferencia, G se refiere a su propio código y dice «Mi código no es el de un enunciado demostrable». En otras palabras, G dice «Yo soy un enunciado no demostrable».

Ahora bien, dado que G es un enunciado, de acuerdo a nuestra definición de verdad, G es o bien verdadero o bien falso. Si G fuera falso, sería entonces verdad la negación de lo que afirma G. Es decir, G sería un enunciado demostrable. Pero obtendríamos así un enunciado demostrable y falso. Esto es absurdo, porque de acuerdo con el Teorema de Corrección, como los axiomas son todos fórmulas verdaderas, los enunciados demostrables también *son todos verdaderos*.

Entonces G tiene que ser verdadero, lo que significa que es cierto lo que afirma de sí mismo, que no es demostrable. Hemos obtenido un enunciado que es verdadero y no demostrable, tal como queríamos probar. ■

usar hoy 17 diciembre 2024

Resumen de los puntos principales de la demostración:

1. La operación de concatenar dos números escritos con rayas y puntos consiste en escribir el segundo de ellos a continuación del primero. Suponemos como hipótesis provisoria que esta operación es expresable en el lenguaje formal. También asumimos, como segunda hipótesis provisoria, que toda propiedad recursiva es expresable.
2. A cada fórmula, y a cada sucesión de fórmulas, del lenguaje formal le asignamos un código o número de Gödel. La escritura de estos códigos requiere solamente dos dígitos, ambos distintos de cero, llamados *raya* y *punto*. Las demostraciones formales son, en particular, sucesiones de fórmulas y también les asignamos sus respectivos códigos.
3. Existe un procedimiento mecánico que determina en una cantidad finita de pasos si un número natural es, o no es, el código de una fórmula, y otro que determina si un número natural es, o no es, el código de una demostración. Como consecuencia, tanto «x es el código de una fórmula» como «x es el código de una demostración» son ambas propiedades recursivas y, por la segunda hipótesis, resultan expresables en el lenguaje formal. (Se usa aquí, implícitamente, la unicidad de escritura a partir de los átomos).
4. La propiedad «x es el código de una demostración de la fórmula de código y» (que abreviamos como «x Dem y») es también recursiva y expresable en el lenguaje formal. La expresión «$\neg\exists x(x \text{ Dem } y)$» significa «Si y es el código de una fórmula, entonces esta fórmula no es demostrable».

5. La *función diagonal* d(x) se define del siguiente modo: si n es el código de la expresión «x cumple la propiedad P», entonces d(n) es el código de la expresión «n cumple la propiedad P». Como d(x) es recursiva, su definición, por la segunda hipótesis, es expresable en el lenguaje formal.
6. Método de autorreferencia: Si n es el número de Gödel de la expresión «d(x) cumple la propiedad P» entonces el enunciado «d(n) cumple la propiedad P» tiene código d(n). Es decir, el enunciado «d(n) cumple la propiedad P» dice: «Mi número de Gödel cumple la propiedad P».
7. Si n es el número de la fórmula «$\neg\exists x$(x Dem d(y))» entonces el enunciado G:$\neg\exists x$(x Dem d(**n**)) habla de su propio código y dice: «Mi número de Gödel no es el de un enunciado demostrable» o, en el plano del lenguaje, «Soy un enunciado no demostrable».
8. Si G fuera un enunciado falso entonces tendríamos un teorema falso. Esto no es posible porque los axiomas son todos verdaderos, y entonces los enunciados que se deducen de ellos también son verdaderos (Teorema de Corrección). Por lo tanto G es verdadero, lo que significa que es verdad lo que dice de sí mismo, es decir, G es un enunciado verdadero y no demostrable.

Observemos que, tal como habíamos anunciado, toda la argumentación del teorema puede desarrollarse a partir de las dos hipótesis provisorias del primer punto. Estas dos hipótesis serán probadas en los capítulos 7 y 8.

§ 3. «Ser verdadero» no es expresable

Hemos visto que la definición de verdad aritmética que dimos en el capítulo 3 no es recursiva, veremos ahora que ni siquiera es expresable en el lenguaje formal. El teorema, demostrado por primera vez en [Tarski], enuncia lo siguiente:

> **Teorema:** La propiedad «x es el número de Gödel de un enunciado verdadero» no es expresable en el lenguaje formal.

Demostración: Para demostrar el teorema, supongamos (por el absurdo) que la expresión sí fuera traducible, entonces también sería traducible su negación: «x no es el número de Gödel de un enunciado verdadero». Por el método de autorreferencia, podríamos escribir un enunciado H que diría: «Yo no soy un enunciado verdadero».

Si H es verdadero entonces, por lo que dice, es falso. Pero si es falso, entonces es verdadero. Esto es una contradicción. El enunciado H no puede existir y, en

consecuencia, la expresión «*x* es el número de Gödel de un enunciado verdadero» no puede ser expresada en el lenguaje formal. ■

CAPÍTULO SEIS

LA VERSIÓN GENERAL (SINTÁCTICA) DEL TEOREMA DE INCOMPLETITUD. EL TEOREMA DE CONSISTENCIA

La versión general (sintáctica) del Teorema de Incompletitud. El Teorema de Consistencia. Ejercicios.

> Lo que hace que un objeto sea difícilmente comprensible no es —cuando es significativo, importante— que exija cualquier instrucción especial sobre cosas abstrusas para su comprensión, sino la oposición entre comprensión del objeto y aquello que quiere ver la mayoría de los hombres. Precisamente por ello puede ser lo cercano lo más difícilmente comprensible. Lo que hay que vencer no es una dificultad del entendimiento sino de la voluntad…
>
> LUDWIG WITTGENSTEIN
> *Aforismos*

§ 1. LA VERSIÓN GENERAL (SINTÁCTICA) DEL TEOREMA DE INCOMPLETITUD

En el capítulo anterior probamos que si en una teoría recursiva (y consistente) los axiomas son fórmulas verdaderas entonces existe un enunciado G que es verdadero, pero no demostrable. Por supuesto, tampoco es demostrable ¬G, ya que ¬G es falso y todos los enunciados que se deducen de axiomas verdaderos son también ellos mismos verdaderos. Es decir, G es un enunciado indecidible para la teoría.

Observemos que tanto la formulación del teorema como su demostración se basan en la noción de *verdad matemática*, sin embargo nuestra intención en los párrafos que siguen es argumentar que, hasta cierto punto, esta noción es arbitraria.

Notemos en primer lugar que si «Ser una fórmula aritmética verdadera» fuera una propiedad recursiva entonces (por la Hipótesis 2 del capítulo anterior) sería expresable en el lenguaje formal. Pero en ese mismo capítulo probamos que «Ser una fórmula aritmética verdadera» no es expresable y por lo tanto tampoco es recursiva.

Esto demuestra que hay fórmulas cuya verdad o falsedad no puede ser determinada mecánicamente en una cantidad finita de pasos. A estas fórmulas Hilbert las llamaba *ideales*, en contraposición con las que llamaba *fórmulas con sentido (meaningful sentences)*, que son aquellas cuya verdad o falsedad se puede determinar en una cantidad finita de pasos. Hilbert proponía reemplazar la noción semántica de *verdad* (no verificable mecánicamente) por la noción sintáctica de *consistencia*: una fórmula ideal se declararía válida en el caso de que fuera consistente con los axiomas.

Como el enunciado G, verdadero pero no demostrable, es indecidible, entonces tanto si agregamos G como si agregamos ¬G como nuevo axioma, en ambos casos obtenemos teorías que son consistentes. Además, si la teoría original era recursiva, al

agregar el nuevo axioma obtenemos una teoría también recursiva. (Para una demostración de estos hechos véase el Ejercicio 6.1 al final del capítulo).

Pero es solamente por el significado concreto que atribuimos a los símbolos de G en el contexto de la aritmética usual que decimos de G es verdadero. Dado que la teoría que se obtiene al agregar ¬G es consistente, puede probarse que existe algún objeto **O** (una *aritmética no estándar*) tal que todas las fórmulas con sentido que son verdaderas en la aritmética usual siguen siendo verdaderas en **O** y en la que ¬G es verdadero (y consecuentemente G es un enunciado falso). No hay un motivo real para preferir una interpretación por sobre la otra, por lo que la verdad de G es relativa.

Gödel quería una demostración de su teorema que se basara en cuestiones puramente sintácticas, independientes de la forma en que se defina la verdad de las fórmulas ideales, de modo que su validez no pudiera llegar a ser cuestionada. De allí la necesidad de una *versión sintáctica* (o *general*) del Teorema de Incompletitud, que apele exclusivamente a conceptos sintácticos.

Por otra parte, la existencia de un enunciado indecidible recuerda a la situación del quinto postulado de Euclides. La geometría de Euclides está basada en cinco postulados o axiomas (más algunas *nociones comunes* que equivalen a axiomas generales de la lógica). De los cinco postulados, los primeros cuatro son intuitivamente evidentes. Por ejemplo, el cuarto dice que todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

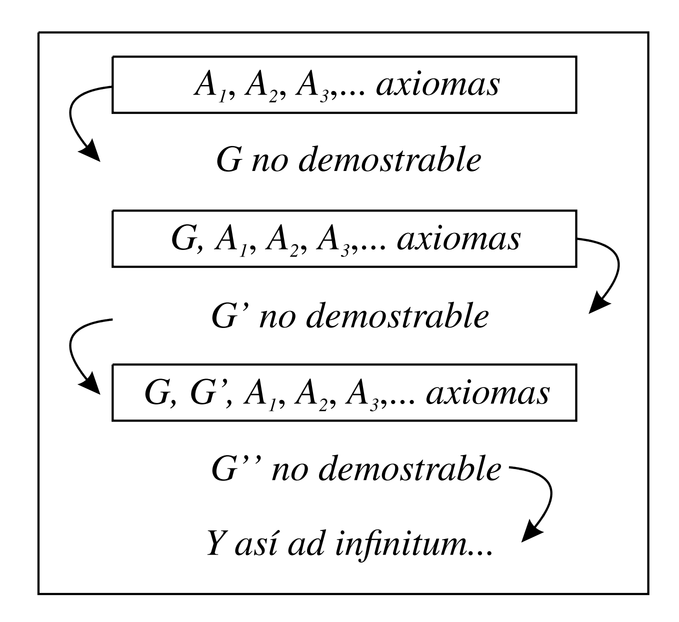
El quinto postulado, en cambio, tiene una redacción más compleja y su verdad no es evidente a simple vista. La versión original tal como la escribió Euclides puede leerse en el Apéndice I, pero en general suele formularse con esta afirmación equivalente, y más sencilla: «Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela a ella».

Después de muchos siglos de debate en torno al quinto postulado, se demostró finalmente que, si tomamos como axiomas los primeros cuatro, el quinto resulta ser una afirmación indecidible. Podemos, entonces, agregar a los cuatro primeros postulados, o bien el quinto postulado, o bien su negación,[9] y en ambos casos obtendremos teorías consistentes (la geometría euclideana si agregamos el quinto postulado y una geometría no euclideana en caso contrario).

Del mismo modo, como ya dijimos, si G es indecidible, tanto si agregamos G como si agregamos ¬G obtendremos teorías que son ambas otra vez consistentes, y si la teoría original era recursiva, al agregar el nuevo axioma obtendremos también una teoría recursiva.

Consideremos ahora una teoría recursiva y consistente para la aritmética y supongamos que todos los axiomas son fórmulas verdaderas. Si agregamos a la teoría, como nuevo axioma, el enunciado G (verdadero y no demostrable) entonces la teoría así ampliada es también recursiva, consistente, y sus axiomas son verdaderos. De acuerdo a la versión semántica del Teorema de Gödel, existe para esta teoría ampliada un enunciado G' verdadero y no demostrable. Y si agregamos a G' como

nuevo axioma entonces habrá a su vez un enunciado G'' verdadero y no demostrable, y así *ad infinitum.*



Ahora bien, es también lícito (en el sentido de que no genera inconsistencias) agregar a ¬G como nuevo axioma. ¿Tendrá esta nueva teoría un enunciado indecidible? Nos gustaría creer que sí, que la situación es perfectamente simétrica. Pero el teorema que probamos en el capítulo anterior no nos permite asegurarlo, ya que solamente habla de teorías con axiomas verdaderos, mientras que ¬G es falso.

En 1936, John B. Rosser publicó (véase [Rosser]) una *versión general* del Teorema de Incompletitud que se remite solamente a la noción de consistencia. En realidad el teorema original de Gödel consideraba una hipótesis más exigente, aunque también de carácter sintáctico: la llamada ω-consistencia (léase omega-consistencia).[10]

Una teoría es ω-*consistente* si toda vez que se puede demostrar que «**0** cumple la propiedad P», «**1** cumple la propiedad P», «**2** cumple la propiedad P» y así sucesivamente para todos los números naturales entonces no se puede demostrar que «existe *x* que no cumple la propiedad P». Es decir, si P(**0**), P(**1**), P(**2**), P(**3**),… son todos enunciados demostrables entonces ∃*x*¬P(*x*) no es demostrable.

Toda teoría ω-consistente es también consistente, sin embargo la recíproca no es cierta: existen teorías que son consistentes pero no ω-consistentes. En cierto sentido, hay más teorías consistentes que ω-consistentes, y es por eso que el teorema de Rosser da una versión más general del teorema original de Gödel.

Como la consistencia se conserva tanto si se agrega G como su negación, la versión general nos asegura, en ambos casos, la existencia de un enunciado indecidible. Esta versión puramente sintáctica es la que hemos enunciado en el capítulo 3:

TEOREMA DE INCOMPLETITUD (versión sintáctica):
Para toda teoría recursiva y consistente que contenga suficiente aritmética existe un enunciado indecidible, es decir, existe un enunciado G tal que ni G ni ¬G son demostrables.

Recordemos que la frase «contiene suficiente cantidad de aritmética» significa que:

1. *Todo enunciado de la aritmética, cuya verdad pueda comprobarse mecánicamente en una cantidad finita de pasos, es demostrable a partir de los axiomas.*
2. *Cualquiera que sea el numeral* **n**, *el enunciado* $\forall x(x \leq \mathbf{n} \bigvee \mathbf{n} \leq x)$ *es demostrable.*
3. *Cualquiera que sea el numeral* **n**, *el enunciado* $\forall x(x \leq \mathbf{n} \to (x = \mathbf{0} \bigvee x = \mathbf{1} \bigvee \ldots \bigvee x = \mathbf{n}))$ *es demostrable.*

(La expresión «$x \leq y$» es una abreviatura para «Existe z tal que $x + z = y$»).

Demostración: Para esta demostración sólo necesitamos suponer, como en el capítulo anterior, las siguientes dos hipótesis (que probaremos en los capítulos 7 y 8):

Hipótesis 1: La concatenación es expresable en el lenguaje formal.

Hipótesis 2: Toda propiedad recursiva es expresable en el lenguaje formal. (Recordemos que una propiedad es *recursiva* si la verificación de esa propiedad puede hacerse con un procedimiento mecánico, en una cantidad finita de pasos).

La demostración empieza como en el capítulo anterior:

1. A cada sucesión finita de símbolos del lenguaje formal le asignamos un código o número de Gödel, obtenido por concatenación a partir de raya y punto.
2. Como la teoría es recursiva, existe un procedimiento mecánico que determina en una cantidad finita de pasos si un número dado es, o no es, el número de Gödel de una demostración. Una consecuencia de ello es que la expresión «x es el número de Gödel de una demostración de la fórmula con número de Gödel y» puede traducirse al lenguaje formal. Ésta es la expresión que abreviamos como «x Dem y».

A partir de aquí, la demostración de la versión general difiere de la demostración de la versión semántica. Seguiremos esencialmente para la prueba la exposición del

capítulo 3 de [Mendelson].

Necesitamos construir ahora una fórmula que se refiera a la *negación* de un cierto enunciado. Observemos que si x es el número de Gödel de una fórmula P, el número de Gödel de la fórmula ¬P se obtiene colocando el número $\underline{9}\bullet$ (que es el código del símbolo ¬) delante del código que corresponde a la fórmula P. Es decir, si x es el código de P, entonces el código de ¬P es $\underline{9}\bullet\ x$ (la concatenación de $\underline{9}\bullet$ con x). A este último número lo llamaremos neg(x).

Una primera fórmula que nos proponemos escribir, para los propósitos de la demostración, debe decir: «Si u es el código de una demostración del enunciado de código x, entonces existe una demostración de la negación de este enunciado cuyo código z es menor o igual que u». Esta fórmula es expresable en el lenguaje formal y se puede escribir así:

$$\forall u(u \text{ Dem } x \rightarrow \exists z(z \leq u \bigwedge z \text{ Dem neg}(x)))$$

Como hicimos en el capítulo anterior, queremos transformar esta fórmula en un enunciado R que hable de sí mismo y que dirá: «Si hubiera una demostración de mí mismo con número u entonces habría una demostración de mi negación con número $z \leq u$».

Podemos adelantar en este punto una parte de la demostración para entender cómo el requisito $z \leq u$ se relaciona con las condiciones 2 y 3.

Si el enunciado R fuera demostrable entonces habría una demostración de él con número n y, por lo que R mismo dice, habría también una demostración de ¬R, es decir, podríamos afirmar que «Existe z que es el número de una demostración de ¬R». En principio este último enunciado es no finitista pues se descompone en: «(**0** es el número de una demostración de ¬R) $\bigvee$ (**1** es el número de una demostración de ¬R) $\bigvee$ …». Pero, como explicamos en el capítulo 3, por las condiciones 2 y 3, y dado que z debe ser necesariamente menor o igual que n, «Existe z que es el número de una demostración de ¬R» se reduce a una cantidad finita de disyunciones. En la demostración incorporamos esas disyunciones a una demostración formal para llegar así a una contradicción: si R fuera demostrable también lo sería ¬R y esto es imposible debido a la consistencia de la teoría. En consecuencia, R no puede ser demostrable.

Como mostramos en el capítulo anterior, la herramienta para obtener un enunciado autorreferente es la función diagonal d(x). Recordemos que si n es el número de una fórmula con una variable libre, entonces d(n) es el número del enunciado que se obtiene reemplazando a la variable libre por **n**. Con esto en mente construimos la fórmula:

$$\forall u(u \text{ Dem d}(x) \rightarrow \exists z(z \leq u \bigwedge z \text{ Dem neg}(\text{d}(x))))$$

Si q es el número de Gödel de esta fórmula, entonces d(q) es el número del enunciado:

$$\text{R: } \forall u(u \text{ Dem d}(\mathbf{q}) \rightarrow \exists z(z \leq u \bigwedge z \text{ Dem neg}(\text{d}(\mathbf{q}))))$$

Llamemos d(**q**) = **p**, entonces **p** es el código del enunciado R, que se refiere a sí mismo y dice: «Si hay una demostración de mí mismo con código *u* entonces hay una demostración de mi negación con código $z \leq u$»:

$$\text{R: } \forall u(u \text{ Dem } \mathbf{p} \rightarrow \exists z(z \leq u \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p})))$$

Probemos ahora que efectivamente R es indecidible, es decir, que ni R ni ¬R son demostrables.

Para comenzar la prueba (que haremos por reducción al absurdo) supongamos que R sí es demostrable y veamos que esto nos lleva a una contradicción (la conclusión será entonces que R no puede ser demostrable).

Si R es demostrable, sea *k* el número de Gödel de una demostración de R. Entonces **k** Dem **p** es verdadero y su verdad puede determinarse en una cantidad finita de pasos.[11] En consecuencia, por la Condición 1, **k** Dem **p** es demostrable. Por otra parte, observemos que estamos suponiendo que:

$$\text{R: } \forall u(u \text{ Dem } \mathbf{p} \rightarrow \exists z(z \leq u \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))) \text{ es demostrable}$$

Sea P(*u*) la fórmula $u \text{ Dem } \mathbf{p} \rightarrow \exists z(z \leq u \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ entonces el enunciado $\forall u\text{P}(u) \rightarrow \text{P}(u/\mathbf{k})$ es un axioma (pues es de la forma del axioma-esquema L_4 de la lógica de primer orden) y en consecuencia, por *modus ponens*, P(*u*/**k**) es demostrable. Es decir, el enunciado:

$$\mathbf{k} \text{ Dem } \mathbf{p} \rightarrow \exists z(z \leq \mathbf{k} \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p})) \text{ es demostrable.}$$

Ya vimos, por otra parte, que «**k** Dem **p**» es demostrable, entonces, otra vez por *modus ponens*:

$$\exists z(z \leq \mathbf{k} \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p})) \text{ es demostrable.} \qquad (*)$$

Esta última afirmación es esencial y por eso la destacamos con un asterisco.

Como R es demostrable y la teoría es consistente entonces ¬R no es demostrable. Dado que no existe una demostración de ¬R, entonces, cualquiera que sea **n**, el enunciado **n** Dem neg(**p**) es falso. Es decir, el enunciado ¬(**n** Dem neg(**p**)) es verdadero y para cada **n** su verdad es verificable en una cantidad finita de pasos. Por lo tanto, por la Condición 1, para cada **n**:

$$\neg(\mathbf{n} \text{ Dem neg}(\mathbf{p})) \text{ es demostrable.}$$

Ahora bien, si P(**n**) es demostrable, entonces el enunciado $\forall x(x = \mathbf{n} \rightarrow \text{P}(x))$ es también demostrable (véase Ejercicio 6.10). Sea P(*x*) la fórmula $\neg(x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$. Entonces, cualquiera que sea **n**, el enunciado $\forall x(x = \mathbf{n} \rightarrow \neg(x \text{ Dem neg}(\mathbf{p})))$ es

demostrable y por aplicación del esquema L_4, también es demostrable[12] $x = \mathbf{n} \rightarrow \neg(x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$. En particular son demostrables:

$$x = \mathbf{0} \rightarrow \neg(x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$$
$$x = \mathbf{1} \rightarrow \neg(x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$$
$$x = \mathbf{2} \rightarrow \neg(x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$$

Y así sucesivamente hasta llegar a $x = \mathbf{k} \rightarrow \neg(x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$.

Por otra parte, la condición 3 nos dice que $x \leq \mathbf{k} \rightarrow (x = 0 \bigvee x = \mathbf{1} \bigvee \ldots \bigvee x = \mathbf{k})$ es demostrable. Entonces:

$x \leq \mathbf{k} \rightarrow (x = \mathbf{0} \bigvee x = \mathbf{1} \bigvee \ldots \bigvee x = \mathbf{k})$ es demostrable
$x = \mathbf{0} \rightarrow \neg(x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ es demostrable
$x = \mathbf{1} \rightarrow \neg(x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ es demostrable
$x = \mathbf{2} \rightarrow \neg(x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ es demostrable

Y así sucesivamente hasta **k**.

Un principio de la lógica dice que si $P \rightarrow (Q \bigvee R)$ es una fórmula demostrable y también son demostrables $Q \rightarrow S$ y $R \rightarrow S$ entonces $P \rightarrow S$ es demostrable. La demostración puede verse en el Ejercicio 6.6. Esta afirmación se generaliza así: si $P \rightarrow (Q_0 \bigvee Q_1 \bigvee \ldots \bigvee Q_k)$ es demostrable y también son demostrables $Q_0 \rightarrow S$, $Q_1 \rightarrow S$, …, $Q_k \rightarrow S$, entonces $P \rightarrow S$ es demostrable. Deducimos en consecuencia que la fórmula $x \leq \mathbf{k} \rightarrow \neg(x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ es demostrable.

Pero $x \leq \mathbf{k} \rightarrow \neg(x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ es equivalente a $\neg(x \leq \mathbf{k} \bigwedge x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ (de hecho, esta segunda fórmula es solamente una abreviatura de la primera).[13] Luego, $\neg(x \leq \mathbf{k} \bigwedge x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ es demostrable.

A una demostración de $\neg(x \leq \mathbf{k} \bigwedge x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ agreguémosle inmediatamente a continuación la siguiente secuencia de fórmulas (y comprobemos que paso a paso la secuencia extendida sigue siendo una demostración):

1. $\neg(x \leq \mathbf{k} \bigwedge x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$
2. $\forall x \neg(x \leq \mathbf{k} \bigwedge x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ — Generalización
3. $\forall x \neg(x \leq \mathbf{k} \bigwedge x \text{ Dem neg}(\mathbf{p})) \rightarrow \neg(z \leq \mathbf{k} \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ — Axioma L_4
4. $\neg(z \leq \mathbf{k} \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ — *Modus ponens*
5. $\forall z \neg(z \leq \mathbf{k} \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ — Generalización

Hemos obtenido una demostración de $\forall z \neg(z \leq \mathbf{k} \wedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$, y este enunciado es equivalente a $\neg\exists z(z \leq \mathbf{k} \wedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ (el primero es una abreviatura del segundo). Por lo tanto $\neg\exists z(z \leq \mathbf{k} \wedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ es demostrable.

Pero la afirmación que hemos llamado (*) dice que también es demostrable $\exists z(z \leq \mathbf{k} \wedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$. Hay entonces un enunciado tal que él y su negación son ambos demostrables, esto no es posible ya que la teoría es consistente. Hemos llegado a la contradicción que buscábamos, por lo que R, en consecuencia, no es demostrable.

Nos falta ahora verificar que ¬R tampoco es demostrable. En esta segunda parte de la prueba vamos a apelar al llamado *Teorema de la Deducción*, que dice que si al agregar a una teoría la fórmula P resulta que cierta fórmula Q es demostrable (con una demostración que no use la regla de generalización sobre variables libres de P) entonces la fórmula $P \rightarrow Q$ es demostrable en la teoría. (La prueba de este teorema puede verse al final del capítulo).

Para probar que $\neg R{:}\neg\forall u(u \text{ Dem } \mathbf{p} \rightarrow \exists z(z \leq u \wedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p})))$ no es demostrable comencemos suponiendo que sí lo es para llegar a una contradicción.

Como antes, sea **m** el número de una demostración de ¬R. Luego **m** Dem neg(**p**) es verdadero y su verdad puede verificarse en una cantidad finita de pasos por lo que, de acuerdo a la Condición 1,

$$\mathbf{m} \text{ Dem neg}(\mathbf{p}) \text{ es demostrable.}$$

Agregamos ahora a la teoría, como nuevo axioma provisorio (para usar el Teorema de la Deducción) la fórmula $\mathbf{m} \leq y$. Un principio de la lógica dice que si P y Q son ambas fórmulas demostrables entonces la conjunción $P \wedge Q$ es demostrable (véase el Ejercicio 6.6). Tenemos así que:

$$\mathbf{m} \leq y \wedge \mathbf{m} \text{ Dem neg}(\mathbf{p}) \text{ es demostrable.}$$

Además, por el axioma-esquema L_4, vale que:

$$\forall z \neg(z \leq y \wedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p})) \rightarrow \neg(\mathbf{m} \leq y \wedge \mathbf{m} \text{ Dem neg}(\mathbf{p})) \text{ es un axioma.}$$

Por el Ejercicio 6.4, que dice que $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$ es demostrable (cualesquiera que sean P y Q) deducimos que:

$$(\mathbf{m} \leq y \wedge \mathbf{m} \text{ Dem neg}(\mathbf{p})) \rightarrow \neg\forall z \neg(z \leq y \wedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p})) \text{ es demostrable.}$$

En consecuencia:

$$(\mathbf{m} \leq y \wedge \mathbf{m} \text{ Dem neg}(\mathbf{p})) \rightarrow \exists z(z \leq y \wedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p})) \text{ es demostrable.}$$

Y, por *modus ponens*,

$$\exists z(z \leq y \wedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p})) \text{ es demostrable.}$$

Es decir, si agregamos a la teoría la fórmula $\mathbf{m} \leq y$ entonces $\exists z(z \leq y \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ es demostrable. Y en la deducción solamente hemos usado la regla de *modus ponens*. Por el Teorema de la Deducción, vale entonces:

$$\mathbf{m} \leq y \rightarrow \exists z(z \leq y \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p})) \text{ es demostrable.}$$

Como la teoría es consistente, y por nuestra hipótesis de absurdo estamos suponiendo que ¬R es demostrable, entonces R no es demostrable. Por lo tanto, para todo **n**, el enunciado $\neg(\mathbf{n} \text{ Dem } \mathbf{p})$ es verdadero y como en cada caso la verdad del enunciado es verificable en una cantidad finita de pasos, entonces (por la Condición 1) para cada **n**, el enunciado $\neg(\mathbf{n} \text{ Dem } \mathbf{p})$ es demostrable.

En la primera parte de la demostración vimos que si, para cada **n**, vale que $\neg(\mathbf{n} \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ es demostrable, entonces $x \leq \mathbf{k} \rightarrow \neg(x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ es demostrable. De la misma manera, del hecho de que para cada **n** el enunciado $\neg(\mathbf{n} \text{ Dem } \mathbf{p})$ sea demostrable deducimos que:

$$y \leq \mathbf{m} \rightarrow \neg(y \text{ Dem } \mathbf{p}) \text{ es demostrable.}$$

Agreguemos ahora a los axiomas de la teoría transitoriamente la fórmula $y \text{ Dem } \mathbf{p}$ como nuevo axioma (para usar otra vez el Teorema de la Deducción), y consideremos el siguiente esquema de demostración formal:

1.	$y \text{ Dem } \mathbf{p}$	
2.	$y \leq \mathbf{m} \bigvee \mathbf{m} \leq y$	Demostrable, por la Condición 2
3.	$\mathbf{m} \leq y \rightarrow \exists z(z \leq y \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$	Demostrable (se probó antes)
4.	$y \leq \mathbf{m} \rightarrow \neg(y \text{ Dem } \mathbf{p})$	Demostrable (se probó antes)
5.	$\neg(y \text{ Dem } \mathbf{p}) \bigvee \exists z(z \leq y \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$	Ejercicio 6.7 aplicado a 2, 3 y 4
6.	$\exists z(z \leq y \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$	Ejercicio 6.8 aplicado a 1 y 5

Tenemos así que, a partir de la fórmula $y \text{ Dem } \mathbf{p}$, la fórmula $\exists z(z \leq y \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ es demostrable.

Por el Teorema de la Deducción, la fórmula $y \text{ Dem } \mathbf{p} \rightarrow \exists z(z \leq y \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ es entonces demostrable. Aplicando la regla de generalización y el esquema L_4 se llega a que $\forall u(u \text{ Dem } \mathbf{p} \rightarrow \exists z(z \leq u \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p})))$ es demostrable.

Por otra parte, habíamos partido de la suposición de que $\neg R{:}\neg\forall u(u \text{ Dem } \mathbf{p} \rightarrow \exists z(z \leq u \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p})))$ es demostrable. Llegamos así a que:

$$\forall u(u \text{ Dem } \mathbf{p} \rightarrow \exists z(z \leq u \bigwedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))) \text{ es demostrable}$$

$$\neg\forall u(u \text{ Dem } \mathbf{p} \rightarrow \exists z(z \leq u \wedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))) \text{ es demostrable.}$$

Esto contradice que la teoría sea consistente. La contradicción resulta de suponer que ¬R es demostrable. Por lo tanto, ¬R no es demostrable. Hemos probado así la versión generalizada del primer Teorema de Incompletitud de Gödel. ■

§ 2. El Teorema de Consistencia

Estamos ahora en condiciones de dar también una prueba del segundo teorema fundamental de Gödel.

> Teorema de Consistencia:
> *Si una teoría es recursiva, contiene suficiente aritmética y es consistente entonces la demostración de su consistencia no puede ser formalizada dentro de la propia teoría. (En otras palabras, una teoría consistente y recursiva que contenga suficiente aritmética no puede demostrar su propia consistencia).*

Demostración: Para probar este teorema consideremos el mismo enunciado R que construimos antes. Hemos probado que si R fuera demostrable entonces $\neg\exists z(z \leq u \wedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ y $\exists z(z \leq u \wedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ son ambas fórmulas demostrables.

En el capítulo 3 vimos que si P es una fórmula cualquiera tal que P y ¬P son ambas demostrables, entonces toda otra fórmula Q es también demostrable.

Si $\neg\exists z(z \leq u \wedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ y $\exists z(z \leq u \wedge z \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))$ fueran demostrables entonces serían demostrables todos los enunciados, en particular, el que dice que la teoría no es consistente, o sea, que existe alguna fórmula con número x tal que ella y su negación son ambas demostrables. Este enunciado se escribe así:

$$\exists x\exists y\exists z(y \text{ Dem } x \wedge z \text{ Dem neg}(x))$$

Equivalentemente:

$$\neg\forall x\neg(\exists y\exists z(y \text{ Dem } x \wedge z \text{ Dem neg}(x)))$$

A este enunciado lo llamaremos ¬CON, y es, obviamente, la negación de CON, el enunciado que afirma que la teoría es consistente, es decir, que no hay una fórmula tal que ella y su negación sean ambas demostrables:

$$\text{CON: } \forall x\neg(\exists y\exists z(y \text{ Dem } x \wedge z \text{ Dem neg}(x)))$$

El desarrollo que hicimos antes demuestra que si tomamos a ¬R como premisa entonces ¬CON es demostrable. Ahora bien, la sucesión de fórmulas que lleva desde ¬R hasta ¬CON se puede traducir a una demostración formalizada y esto se debe esencialmente a que en todo momento hemos usado argumentos sintácticos.

Por el Teorema de la Deducción vale entonces que:

$\neg R \to \neg CON$ es demostrable.[14]

Por el Ejercicio 6.4:

$CON \to R$ es demostrable.

Si CON fuera demostrable entonces, por *modus ponens*, R sería demostrable, pero ya hemos probado que no lo es. Por lo tanto CON no es demostrable. ■

Hemos probado que si una teoría *T* es recursiva, consistente y contiene suficiente aritmética, entonces su consistencia no puede ser demostrada dentro de la propia teoría.

Esto no significa que sea imposible probar la consistencia de *T*, sino que una tal demostración debe usar ideas y métodos no representables en *T*.

Por ejemplo, G. Gentzen ha dado (véase [Gentzen]) una demostración de la consistencia de los axiomas de Peano de primer orden, pero esta demostración utiliza una parte de la teoría de los ordinales infinitos numerables, por lo que su validez depende de la consistencia de una parte de la teoría de conjuntos.

§ 3. Ejercicios

La resolución de algunos de los ejercicios utiliza el Teorema de la Deducción, que enunciamos y probamos aquí. En todos estos ejercicios utilizaremos argumentos únicamente sintácticos, sin referencia al posible significado de las fórmulas.

Teorema de la Deducción: Si al agregar a la teoría la fórmula P resulta que cierta fórmula Q es demostrable (y en la demostración no se usa la regla de generalización sobre variables libres de P) entonces la fórmula $P \to Q$ es demostrable en la teoría.

Demostración: Tomemos una demostración formalizada de Q basada en P y en los axiomas de la teoría y que use como reglas de inferencia el *modus ponens* y la generalización sobre variables que no estén libres en P.

Vamos a ver que si S es *cualquier* fórmula de la demostración entonces $P \to S$ es demostrable en la teoría. En particular esto será cierto para la última fórmula de la demostración, es decir, para Q.

Tenemos que verificar que la propiedad «$P \to S$ es demostrable» se va propagando a lo largo de la demostración desde las primeras fórmulas en adelante.

Si S es un axioma, entonces $P \to S$ es demostrable pues se obtiene por aplicación del *modus ponens* al axioma $S \to (P \to S)$, que proviene del esquema L_1, y al propio axioma S.

Si $S = P$ entonces $P \to P$ también es demostrable. Para verlo, sea H una fórmula cualquiera tal que $P \to H$ es demostrable. Entonces

$$(P \to (H \to P)) \to ((P \to H) \to (P \to P))$$

es un axioma (del esquema L_2) y $P \to (H \to P)$ también (del esquema L_1. Por aplicaciones sucesivas del *modus ponens* se llega a que $P \to P$ es demostrable.

Supongamos que S se obtiene de dos enunciados anteriores por aplicación del *modus ponens*. Digamos que esos enunciados son T y $T \to S$. Hay que ver que si $P \to T$ y $P \to (T \to S)$ son ambos demostrables (o sea T y $T \to S$ tienen la propiedad que queremos que se vaya propagando) entonces $P \to S$ tiene la misma propiedad. En efecto, por el esquema L_2 tenemos que

$$(P \to (T \to S)) \to ((P \to T) \to (P \to S))$$

es un axioma. Y con dos aplicaciones de *modus ponens* se llega a que $P \to S$ es demostrable.

Finalmente, supongamos que S se haya obtenido de una fórmula anterior por aplicación de la regla de generalización, es decir, $S = \forall x U$, donde U es una fórmula y x no aparece libre en P. Si $P \to U$ es demostrable, queremos ver que la propiedad se propaga a $P \to S$, o sea a $P \to \forall x U$. Esto último en efecto sucede, ya que si $P \to U$ es demostrable, entonces, por generalización, $\forall x(P \to U)$ también es demostrable y, por otra parte, el esquema L_5 dice que $\forall x(P \to U) \to (P \to \forall x U)$ es un axioma (justamente cuando x no aparece libre en P). Por *modus ponens* se llega a que $P \to \forall x U$ es demostrable.

Ejercicio 6.1: Verifique que si a una teoría consistente y recursiva le agregamos como nuevo axioma un enunciado indecidible (ya sea G o $\neg G$) se vuelve a obtener una teoría consistente y recursiva.

Resolución: Supongamos que se agrega el enunciado G como axioma. Para ver que la teoría extendida es también recursiva hay que verificar que existe un procedimiento mecánico que comprueba si una fórmula es, o no, un axioma, en una cantidad finita de pasos. Dada una fórmula cualquiera, ejecutamos primero el procedimiento mecánico de la teoría original; si el procedimiento de la teoría original reconoce la fórmula como un axioma, nuestro procedimiento termina. Si la fórmula no es un axioma de la teoría original pasamos a verificar si la fórmula es el enunciado G (haciendo una comparación símbolo a símbolo). Si la fórmula es G entonces es un axioma, en caso contrario no lo es.

Veamos que al agregar el enunciado G como axioma se obtiene una teoría consistente. Sea A un enunciado que es un axioma de la teoría original. Si al agregar G la teoría es inconsistente entonces toda fórmula es demostrable en ella, en particular ¬A es demostrable. Por el Teorema de la Deducción G → ¬A es demostrable en la teoría original, y entonces A → ¬G es también demostrable y como A es un axioma entonces ¬G es demostrable, contradiciendo que G es indecidible. La contradicción nos indica que al agregar G la teoría sigue siendo consistente. Para ¬G la demostración es igual.

Ejercicio 6.2: Verifique que si P y P → Q son demostrables entonces Q y ∀*x*P son también demostrables (donde *x* es una variable cualquiera).

Resolución: Sea una demostración formal de P, agreguemos a continuación una demostración formal de P → Q y finalmente agreguemos Q. Es fácil ver que hemos construido una demostración formal de Q (donde Q se obtiene por *modus ponens* de P y de P → Q). Luego, Q es demostrable. Si a la demostración de P le agregamos simplemente ∀*x*P entonces obtenemos una demostración de esta última fórmula (que se obtiene de P por generalización) por lo que ∀*x*P es demostrable.

Ejercicio 6.3: Verifique que, cualquiera que sea la fórmula P, las fórmulas ¬¬P → P y P → ¬¬P son ambas demostrables.

Resolución: Una *tautología* es un esquema construido solamente con los símbolos → y ¬ que es verdadero independientemente de qué fórmulas se usen para reemplazar a sus letras. Los esquemas L_1, L_2 y L_3 son tautologías y hay un teorema que asegura que toda otra tautología puede deducirse de ellos. La invocación a este teorema permite resolver de inmediato este ejercicio, ya que P → ¬¬P y ¬¬P → P son ambas tautologías. El mismo teorema permite resolver muchos de los ejercicios de este capítulo.

Sin embargo es nuestra intención que, en la medida de lo posible, el libro sea autocontenido y la demostración del teorema al que hacemos referencia sería demasiado extensa. Por ese motivo, vamos a hacer la deducción para cada una de estas tautologías, en vez de apelar al teorema general que habla de todas ellas.

Sea P entonces una fórmula y tomemos como A un axioma cualquiera. Por el esquema L_3 las siguientes fórmulas son axiomas:

(¬¬A → ¬¬P) → (¬P →¬A)
(¬P → ¬A) → (A → P)

Por el Ejercicio 3.3 tenemos entonces que (¬¬A → ¬¬P) → (A → P) es demostrable.

Agreguemos como axioma a la teoría la fórmula $\neg\neg P$. Por aplicación del esquema L_1 tenemos $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg P$ es demostrable, luego $A \rightarrow P$ es demostrable y como A es un axioma entonces P es demostrable. Partiendo de $\neg\neg P$ llegamos a P utilizando únicamente *modus ponens*. De manera que, por el Teorema de la Deducción, podemos concluir que $\neg\neg P \rightarrow P$ es demostrable.

Si ahora reemplazamos P por $\neg P$ llegamos a que $\neg\neg\neg P \rightarrow \neg P$ es demostrable y por el esquema L_3, $(\neg\neg\neg P \rightarrow \neg P) \rightarrow (P \rightarrow \neg\neg P)$ es un axioma, por lo tanto $P \rightarrow \neg\neg P$ es también demostrable.

Ejercicio 6.4: Verifique si P y Q son fórmulas cualesquiera, entonces las fórmulas $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$ y $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$ son demostrables.

Resolución: Agregamos a la teoría la fórmula $P \rightarrow \neg Q$. Dado que $\neg\neg P \rightarrow P$ es demostrable entonces, por el Ejercicio 3.3, $\neg\neg P \rightarrow \neg Q$ resulta ser demostrable. Por el esquema L_3 y *modus ponens*, $Q \rightarrow \neg P$ es demostrable. Como hemos aplicado sólo *modus ponens*, vale el Teorema de la Deducción y resulta que $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$ es demostrable en la teoría. Para $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$ se procede de modo similar.

Ejercicio 6.5: Verifique que si $P \rightarrow (Q \bigvee R)$ es demostrable y también son demostrables $Q \rightarrow S$ y $R \rightarrow S$ entonces $P \rightarrow S$ es demostrable. Esta afirmación se generaliza así: si $P \rightarrow (Q_0 \bigvee Q_1 \bigvee \ldots \bigvee Q_k)$ es demostrable y también son demostrables $Q_0 \rightarrow S$, $Q_1 \rightarrow S$, …, $Q_k \rightarrow S$, entonces $P \rightarrow S$ es demostrable.

Resolución: Supongamos que $P \rightarrow (Q \bigvee R)$, $Q \rightarrow S$ y $R \rightarrow S$ son todas fórmulas demostrables. Agreguemos a la teoría la fórmula P, hay que ver que S es demostrable. Por el Teorema de la Deducción será entonces $P \rightarrow S$ demostrable.

Si agregamos P como axioma, dado que $P \rightarrow (Q \bigvee R)$ es demostrable, entonces $Q \bigvee R$, que equivale a $\neg Q \rightarrow R$, es también demostrable.

Como $\neg\neg R \rightarrow R$ y $R \rightarrow S$ son demostrables entonces $\neg\neg R \rightarrow S$ es demostrable. Y como $S \rightarrow \neg\neg S$ es demostrable, entonces $\neg\neg R \rightarrow \neg\neg S$ lo es. Por aplicación del esquema L_3, $\neg S \rightarrow \neg R$ es demostrable. Del mismo modo, $\neg S \rightarrow \neg Q$ es demostrable y como $\neg Q \rightarrow R$ también es demostrable entonces $\neg S \rightarrow R$ es demostrable.

Si agregamos $\neg S$ a la teoría, como $\neg S \rightarrow \neg R$ y $\neg S \rightarrow R$ son ambas demostrables resulta que R y $\neg R$ son demostrables y entonces cualquier fórmula lo es. Sea A un axioma cualquiera, luego $\neg A$ sería demostrable. Por el Teorema de la Deducción $\neg S \rightarrow \neg A$ es demostrable, luego $A \rightarrow S$ lo es. Como A es un axioma, entonces S es demostrable.

Hemos probado que al agregar P como axioma resulta que S es demostrable, luego $P \rightarrow S$ es demostrable en la teoría.

Ejercicio 6.6: Verifique que si P y Q son ambas fórmulas demostrables entonces $P \wedge Q$ es demostrable.

Resolución: $P \wedge Q$ equivale a $\neg(P \rightarrow \neg Q)$. Vimos en el capítulo 3 que $\neg P \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$ es demostrable, luego, por el ejercicio 4, $\neg(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow P$ es demostrable. Si $\neg(P \rightarrow \neg Q)$ es demostrable entonces P también lo es. Intercambiando P con Q se obtiene el mismo resultado para Q.

Ejercicio 6.7: Verifique que si $P \vee Q$, $P \rightarrow R$ y $Q \rightarrow S$ son demostrables entonces $R \vee S$ es demostrable.

Resolución: $P \vee Q$ equivale a $\neg P \rightarrow Q$. Supongamos que esta fórmula y $P \rightarrow R$ y $Q \rightarrow S$ son todas demostrables. De $P \rightarrow R$ se deduce que $\neg R \rightarrow \neg P$ es demostrable y como $\neg P \rightarrow Q$ es demostrable, entonces $\neg R \rightarrow Q$ lo es. Finalmente, como $Q \rightarrow S$ también es demostrable entonces $\neg R \rightarrow S$, que equivale a $R \vee S$, es demostrable.

Ejercicio 6.8: Verifique que si $P \vee \neg Q$ es demostrable y Q es demostrable entonces P es demostrable.

Resolución: La resolución es inmediata pues $P \vee \neg Q$ equivale a $Q \rightarrow P$.

Ejercicio 6.9: Verifique que si $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ es demostrable entonces $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ es también demostrable.

Resolución: Agreguemos Q a la teoría. Entonces, como $Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$ es un axioma, $P \rightarrow Q$ es demostrable. Por otra parte,

$$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

es un axioma. Como $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ y $P \rightarrow Q$ son demostrables, por doble aplicación de *modus ponens*, $P \rightarrow R$ es demostrable. Hemos visto así que al agregar Q a la teoría $P \rightarrow R$ resulta demostrable. Por el Teorema de la Deducción, $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ es demostrable.

Ejercicio 6.10: Si el enunciado $P(\mathbf{n})$ es demostrable entonces el enunciado $\forall x(x = \mathbf{n} \rightarrow P(x))$ es también demostrable.

Resolución: Supongamos que $P(x)$ es una fórmula atómica. El esquema L_8 nos dice en ese caso que $y = x \rightarrow (P(y) \rightarrow P(x))$ es un axioma.

Como $x = y \rightarrow y = x$ es un axioma e $y = x \rightarrow (\mathrm{P}(y) \rightarrow \mathrm{P}(x))$ es un axioma, por el Ejercicio 3.3, $x = y \rightarrow (\mathrm{P}(y) \rightarrow \mathrm{P}(x))$ es también demostrable. La regla de generalización y el esquema L_4 nos permiten reemplazar la variable y por el numeral **n**, luego $x = \mathbf{n} \rightarrow (\mathrm{P}(\mathbf{n}) \rightarrow \mathrm{P}(x))$ es demostrable y, por el ejercicio 6.9, $\mathrm{P}(\mathbf{n}) \rightarrow (x = \mathbf{n} \rightarrow \mathrm{P}(x))$ es también demostrable.

Por la regla de *modus ponens*, si $\mathrm{P}(\mathbf{n})$ es demostrable resulta que $x = \mathbf{n} \rightarrow \mathrm{P}(x)$ es demostrable y, por la regla de generalización, $\forall x(x = \mathbf{n} \rightarrow \mathrm{P}(x))$ es también demostrable. Esto completa la demostración si $\mathrm{P}(x)$ es atómica.

Para que el razonamiento valga para *cualquier* fórmula habría que ver que el esquema L_{10}: $x = y \rightarrow (\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{P}(y))$ es demostrable, también cuando la fórmula P que allí se menciona no es atómica. Esta verificación se deja como ejercicio. Una vez hecha esta comprobación, la demostración que acabamos de hacer más arriba valdrá para una fórmula $\mathrm{P}(x)$ cualquiera.

CAPÍTULO SIETE

HAY UNA CONCATENACIÓN EXPRESABLE EN LA ARITMÉTICA



¿Qué ocurre si multiplicamos un número natural por 10, 100 o 1.000? Por ejemplo, si multiplicamos $34 \times 10 = 340$, las cifras de la unidad y de la decena de 34, o sea 4 y 3, en el resultado pasan a ser las cifras de la decena y la centena, respectivamente.

SANTILLANA
Mi Manual, 6.º grado

Las demostraciones de los dos capítulos anteriores se basaron en la hipótesis de que la operación de concatenación a partir de dos dígitos (− y •) podía ser traducida al lenguaje de la aritmética, en el sentido de que hay una definición de esta concatenación en términos de las operaciones numéricas de suma, producto y sucesor. En este capítulo probaremos que efectivamente esto es así.

Como ya hemos dicho en capítulos anteriores, *concatenar* dos números consiste en escribir el segundo de ellos a continuación del primero. Para que las ideas resulten más claras comencemos por analizar qué sucede cuando los números están escritos del modo usual, en base 10. La concatenación es en este caso una operación bien conocida: por ejemplo, la concatenación de 345 y 66 es el número 34.566.

¿Cómo podemos escribir esta operación de *símbolos* mediante operaciones *numéricas*? Para comenzar, supongamos que en ninguno de los dos números que vamos a concatenar aparece el dígito 0.

Observemos que para concatenar 345 con 66 debemos desplazar dos lugares hacia la izquierda al número 345 para colocar detrás de él al número 66. Numéricamente, esto consiste en *multiplicar* por 100 (para agregar dos ceros detrás del 345) y *sumar* después 66:

$$\begin{array}{rcr} 345 & \rightarrow & 34500 \\ 66 & & 66 \end{array}$$

La concatenación de 345 con 66 se calcula entonces como $345 \cdot 10^2 + 66$.

Es evidente que hemos agregado dos ceros (es decir, multiplicamos por 10^2) porque 66 tiene dos dígitos. Llamemos *longitud* de x: (y notaremos $\mathrm{L}(x)$) a la cantidad de dígitos del número x escrito en base 10. Si tanto x como y no tienen ceros en su escritura, es fácil comprobar (¡pensarlo!) que la concatenación de x e y se calcula como:

$$xy = x \cdot 10^{\mathrm{L}(y)} + y$$

Ahora bien, la aparición del dígito cero provoca muchos inconvenientes. La concatenación de números es una operación que debe copiar a la concatenación de los símbolos de un lenguaje.

Una característica de la concatenación de símbolos es su *asociatividad*: si s_1, s_2 y s_3 son secuencias de símbolos, entonces concatenar s_1 con s_2s_3 es lo mismo que concatenar s_1s_2 con s_3.

La misma característica queremos para la concatenación de números. Sin embargo la asociatividad falla si se permite la aparición del dígito cero ya que concatenar 20 con 3 no es lo mismo que concatenar 2 con 03 (en la primera operación el resultado es 203 y en la segunda es 23). Por este motivo en el capítulo 5 definimos la concatenación solamente para dígitos distintos de cero.

Podríamos definir la concatenación para números que usen nueve dígitos (excluyendo el 0). Sin embargo, para la demostración de los teoremas de Incompletitud es suficiente con usar solamente dos dígitos, pues, como ya hemos visto, cualquier expresión del lenguaje formal se puede escribir usando solamente dos símbolos, raya y punto.

En este capítulo, para facilitar la demostración, optaremos por tomar como – y • a los dígitos 1 y 2 respectivamente y probaremos que la concatenación es expresable para esta elección en particular. Esto no implica una pérdida de generalidad, ya que los argumentos que prueban los teoremas de Incompletitud sólo requieren que sea expresable *alguna* concatenación.

Al elegir raya y punto como los dígitos 1 y 2, escribiremos los números naturales en una base que es diferente de las que habitualmente se usan: la base 2 sin cero (usada en [Quine]).

Cuando decimos que 1101 es un número escrito en la base 2 usual, entendemos que representa al número (leyendo las cifras de izquierda a derecha): $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$. En base 2 contamos (comenzando desde el 1): 1, 10, 11, 100, 101,…

La base 2 sin cero también usa potencias de 2, pero los dígitos son 1 y 2 en lugar de 1 y 0. En esta base contamos (comenzando desde el 1, ya que el 0 no puede escribirse): 1, 2, 11, 12, 21, 22, 111, 112,121, 122,… El número 122 en base 2 sin cero equivale a $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 2$.

Si la escritura en base 2 usual de un número sólo contiene la cifra 1 entonces su escritura en base 2 sin cero es exactamente la misma.

Cuadro 1: distintas escrituras

Base 10	Base 2 usual	Base 2 sin cero
1	1	1
2	10	2
3	11	11
4	100	12
5	101	21
6	110	22
7	111	111
8	1000	112
9	1001	121
10	1010	122
11	1011	211
12	1100	212
13	1101	221
14	1110	222
15	1111	1111

De la tabla podemos observar los siguientes hechos:

1. El menor número que tiene *k* dígitos en base 2 sin cero es $\underbrace{11...1}_{k}$
2. El mayor número que tiene *k* dígitos en base 2 sin cero es $\underbrace{22...2}_{k}$ y el número que le sigue, inmediatamente mayor, es $\underbrace{11...1}_{k+1}$
3. En consecuencia, si un número *x* tiene *k* dígitos en base 2 sin cero, vale que:

$$\underbrace{11...1}_{k \text{ unos}} \leq x \leq \underbrace{22...2}_{k} < \underbrace{11...1}_{k+1 \text{ unos}}$$

Llamemos L(*x*) a la *longitud*, o cantidad de dígitos, del número *x* cuando está escrito en base 2 sin cero.

Atención: L(*x*) no es la misma función que hemos definido antes para la base 10, ya que la cantidad de dígitos en base 10 no es, en general, la misma que para la base 2 sin cero. De ahora en adelante L(*x*) será siempre la longitud en base 2 sin cero.

Tal como sucede en base 10, la fórmula de la concatenación para números escritos en base 2 sin cero es:

$$xy = x \cdot 2^{\mathrm{L}(y)} + y$$

Por lo tanto, para calcular xy necesitamos conocer el valor de $2^{\mathrm{L}(y)}$.

Vamos a probar a continuación que, dado un número cualquiera u, $2^{\mathrm{L}(u)} - 1$ es el mayor de los números de la forma $2^w - 1$ que es menor o igual que u.

Llamemos k a la longitud $\mathrm{L}(u)$. Si u tiene k dígitos en base 2 sin cero, por la observación que hicimos antes, se tiene que:

$$\underbrace{11...1}_{k\text{ unos}} \leq u \leq \underbrace{22...2}_{k} < \underbrace{11...1}_{k+1\text{ unos}}$$

La definición de la base 2 sin cero nos dice que el número $\underbrace{11...1}_{k\text{ unos}}$ puede escribirse como $2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1$.

En consecuencia:

$$2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1 \leq u < 2^k + 2^{k-1} + \ldots + 2 + 1$$

Veamos ahora que la suma $2^n + 2^{n-1} + \ldots + 2 + 1$ se calcula como $2^{n+1} - 1$. En efecto, si llamamos S a la suma $2^n + 2^{n-1} + \ldots + 2 + 1$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S} = 2^n + 2^{n-1} + \ldots + 2 + 1\\
&2 \cdot \mathrm{S} = 2 \cdot (2^n + 2^{n-1} + \ldots + 2 + 1)\\
&2 \cdot \mathrm{S} = 2^{n+1} + 2^n + \ldots + 2^2 + 2\\
&2 \cdot \mathrm{S} + 1 = 2^{n+1} + 2^n + \ldots + 2^2 + 2 + 1\\
&2 \cdot \mathrm{S} + 1 = 2^{n+1} + \mathrm{S}\\
&2 \cdot \mathrm{S} - \mathrm{S} = 2^{n+1} - 1\\
&\mathrm{S} = 2^{n+1} - 1
\end{aligned}$$

Entonces:

$$2^{\mathrm{k}-1} + 2^{\mathrm{k}-2} + \ldots + 2 + 1 \leq u \leq 2^{\mathrm{k}} + 2^{\mathrm{k}-1} + \ldots + 2 + 1,$$

$$2^k - 1 \leq u < 2^{k+1} - 1$$

El número $2^k - 1$ es de la forma $2^w - 1$ y es menor o igual que u, el siguiente número de esa forma es $2^{k+1} - 1$, que no es menor o igual que u. Luego, $2^k - 1 = 2^{\mathrm{L}(u)} - 1$ es el mayor de los números de la forma $2^w - 1$ que es menor o igual que u.

Si llamamos z al mayor de los números de la forma $2^w - 1$ que es menor o igual que y, entonces $2^{\mathrm{L}(y)} = z + 1$. Tenemos, por lo tanto, que la concatenación en base 2

sin cero se calcula como:

$$xy = x \cdot 2^{\mathrm{L}(y)} + y = x \cdot (z + 1) + y$$

donde z es el mayor de los números de la forma $2^w - 1$ que es menor o igual que y. Llegamos así al teorema central de este capítulo:

Teorema: La concatenación en base 2 sin cero es expresable en el lenguaje formal de la aritmética.

Demostración: Para demostrar el teorema basta con ver que «z es el mayor de los números de la forma $2^w - 1$ que es menor o igual que y» es traducible al lenguaje formal. En efecto, probado esto, la concatenación xy queda expresada como $xy = x \cdot (z + 1) + y$.

Ya sabemos que $z \leq y$ equivale a «Existe u tal que $z + u = y$».

Por otra parte, observemos que un número x es potencia de 2 si y sólo si $x = 1$ o bien $x = 2 \cdot \ldots \cdot 2$ donde el 2 aparece alguna cantidad finita de veces. Es imposible traducir de modo literal esta definición al lenguaje formal; sin embargo, afortunadamente, existe una definición alternativa pues «$x \neq 1$ es potencia de 2 si y sólo si su único divisor primo es 2».[15] Esta expresión involucra dos conceptos: «Ser divisor» y «Ser primo».

La expresión «y es divisor de x» es traducible al lenguaje formal, ya que equivale a «Existe un número u tal que $x = u \cdot y$». Por otra parte, como ya vimos en el capítulo 3, «x es primo» es también traducible pues equivale a:

$$\neg x = \mathbf{1} \bigwedge \neg x = \mathbf{0} \bigwedge \forall y \forall z (yz = x \rightarrow (y = x \bigwedge z = \mathbf{1}) \bigvee (y = \mathbf{1} \bigwedge z = x))$$

La expresión «x es potencia de 2» se traduce entonces como:

$$x \neq \mathbf{1} \bigwedge \forall u((u \text{ es divisor de } x \bigwedge u \text{ es primo}) \rightarrow u = \mathbf{2})$$

La expresión «z es el mayor de los números de la forma $2^w - 1$ que es menor o igual que y» equivale a la conjunción de las siguientes expresiones:

«z es menor o igual que y»;

«z se obtiene restando 1 a una potencia de 2»;

«z es mayor que cualquier otro número que cumpla las dos condiciones anteriores».

Todas estas condiciones son expresables, por lo que la definición de la concatenación en base 2 sin cero es traducible al lenguaje formal. ■

CAPÍTULO OCHO

TODA PROPIEDAD RECURSIVA ES EXPRESABLE CON LA CONCATENACIÓN

> Comenzó a sacar, una por una, las pequeñas unidades del panel etiquetado REFORZAMIENTO DEL EGO.
> —No comprendo por qué me está haciendo esto —dijo Hal—. Está usted destruyendo mi mente. Me voy a hacer infantil… pueril… me convertiré en nada.
>
> ARTHUR C. CLARKE
> *2001, Una odisea espacial*

Hemos visto en los capítulos 5 y 6 que tanto la versión semántica como la versión general del Teorema de Incompletitud de Gödel pueden demostrarse enteramente a partir de estas dos hipótesis:

Hipótesis 1: La concatenación dada por punto y raya es expresable en el lenguaje de la aritmética.

Hipótesis 2: Toda propiedad recursiva es expresable en el lenguaje de la aritmética.

En el capítulo anterior probamos que la primera hipótesis efectivamente se verifica. En este capítulo veremos que la segunda hipótesis se deduce en realidad de la primera. Esto terminará por completo la demostración de los teoremas de Gödel.

En realidad, probaremos algo más: que toda propiedad recursiva es expresable *utilizando únicamente la concatenación* (y sin recurrir a las otras operaciones de la aritmética). Esto será importante para las generalizaciones del Teorema de Gödel que veremos en el capítulo próximo. Como la concatenación que hemos dado es a su vez expresable en el lenguaje de la aritmética, resulta inmediatamente que toda propiedad recursiva es expresable en el lenguaje de la aritmética.

Recordemos que una propiedad es *recursiva* si existe un procedimiento mecánico (o un *algoritmo*) que, dado cualquier número, permite verificar en una cantidad finita de pasos si el número cumple, o no cumple, la propiedad. Ahora bien, no es fácil dar una definición precisa que capture en toda su extensión y posibles variantes la noción intuitiva de «procedimiento mecánico» o «algoritmo». El primero en proponer una definición fue Alonzo Church, en 1936, a través de lo que se llama el *cálculo-lambda*.

El cálculo-lambda propone operaciones sintácticas suficientemente simples como para que no quepa duda de que pueden ser ejecutadas mecánicamente pero, a la vez, con la intención de que sean tan generales como para que cualquier algoritmo, no importa qué tan complejo sea, pueda ser descrito en términos de esas operaciones.

Se conoce como *Tesis de Church* a la afirmación de que, en efecto, *todo* algoritmo puede describirse en términos del cálculo-lambda. No es posible dar una demostración rigurosa de esta tesis. Cualquier intento caería en un círculo vicioso ya que la demostración necesitaría de una definición precisa de la idea de procedimiento mecánico y, justamente, es el cálculo-lambda el que propone esa definición. Sin embargo, la Tesis de Church tiene gran fuerza de convicción, que se ve reforzada por el hecho de que hasta el momento no se ha encontrado ningún ejemplo que la refute. Por ese motivo es aceptada como un axioma de la informática teórica.

Pocos meses después de que Church publicara su definición (y sin tener conocimiento de ésta) Alan Turing dio una definición alternativa de la noción de algoritmo mediante la hoy llamada *máquina de Turing*. Al igual que el cálculo lambda, la máquina de Turing propone unas pocas operaciones mecánicas muy simples con la intención de que su generalidad permita describir cualquier algoritmo.

Se ha demostrado que las definiciones de Church y Turing son ambas equivalentes, en el sentido de que todo procedimiento que se pueda describir mediante el cálculo-lambda puede describirse también mediante una máquina de Turing, y viceversa.

Desde 1936 se han dado muchas otras caracterizaciones de la noción de algoritmo; lo que refuerza la Tesis de Church es que finalmente todas ellas han resultado equivalentes entre sí. De todas estas definiciones alternativas para «procedimiento mecánico» hemos elegido la de *programa*, tal como se expone en los capítulos 2, 3 y 4 de [Davis, Sigal, Weyuker]. Creemos que es la que puede resultar más accesible al lector no especializado porque es una versión muy simple de la idea de programa de computadora. Es decir, la idea intuitiva, pero vaga de «procedimiento mecánico» la reemplazaremos en este capítulo por una definición precisa de programa.

Por lo tanto, a partir de ahora, una propiedad se dirá *recursiva* si existe un programa (en el sentido que vamos a definir) que, al ejecutarse, termina en una cantidad finita de pasos y decide si la propiedad se verifica o no.

Tal como sucede con las demostraciones, un programa será un objeto sintáctico: es el texto formado por una secuencia finita de instrucciones escritas en un lenguaje específico.

Este lenguaje tiene letras, que usaremos como variables.[16] Por una parte, están las *variables de entrada*: X_1, X_2, X_3,… que al comenzar el cálculo contienen los datos iniciales. Si el programa admite como entrada solamente un número, a esta única variable la llamaremos X.

En segundo lugar tenemos la *variable de salida* Y, que inicialmente vale 0 y que, cuando el programa termina, contiene el resultado final.

La entrada representa los datos iniciales que ingresamos y la salida es la respuesta o el resultado que obtenemos al terminar.

Por ejemplo, en un programa para verificar si vale, o no, la propiedad «x es el número de Gödel de una demostración de la fórmula con número y», los valores de entrada serán los números x e y, y la salida será «Sí» cuando los números cumplan la propiedad y «No» en caso contrario. En este caso, para que la salida esté expresada numéricamente, adoptamos la convención de que «Sí» se escriba como 1 y «No» como 0.

Finalmente tenemos las *variables locales*: Z_1, Z_2, Z_3,… que sirven como auxiliares del cálculo y que inicialmente valen 0. Si sólo hay una variable de este tipo, la llamaremos Z.

Como dijimos antes, el programa consta de una secuencia finita de instrucciones. Algunas de ellas podrán estar marcadas con *etiquetas*: A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, A_2, B_2, C_2,… No todas las instrucciones tendrán etiquetas y una misma etiqueta no puede ser usada dos veces en un mismo programa.

Las instrucciones en sí pueden ser de tres tipos:

1. $V \Leftarrow V + 1$, donde V es el nombre de una variable. Ésta es la instrucción «aumentar» e indica que al valor de V se le debe sumar 1.
2. $V \Leftarrow V - 1$, donde V es el nombre de una variable. Ésta es la instrucción «disminuir» e indica que, si $V \neq 0$, al valor de V se le debe restar 1. Si $V = 0$, el valor de V queda igual.
3. Si $V \neq 0$ GOTO L, donde V es el nombre de una variable y L es el nombre de una etiqueta. Ésta es la instrucción «condicional» e indica que si $V \neq 0$ entonces se debe ejecutar la instrucción etiquetada como L. Si $V = 0$ no se hace nada y se pasa a la instrucción siguiente.

El valor que tiene una variable en un momento dado será indicado con la misma letra que la variable, pero escrita en minúscula y cursiva. Así, por ejemplo, x será el valor de la variable X.

Si en algún momento al programa se le ordena ejecutar una acción imposible entonces el cómputo termina. Esto sucede, por ejemplo, si en una instrucción condicional «Si $V \neq 0$ GOTO L» resulta que $V \neq 0$ pero no hay una instrucción con la etiqueta L, o también sucede si se debe pasar a la instrucción siguiente, pero en realidad no la hay pues ya se había llegado a la última instrucción de la lista.

Estamos ahora en condiciones de dar nuestra definición precisa de programa.

Definición: Un *programa* es una lista (o secuencia) finita de instrucciones del tipo 1, 2 o 3 que acabamos de describir.[17]

Por ejemplo:

(a) [A] $X \Leftarrow X - 1$

$Y \Leftarrow Y + 1$

Si $X \neq 0$ GOTO A

Es fácil verificar que si la entrada del programa (a) es 0 entonces la salida es 1, mientras que si la entrada es cualquier otro número $x \neq 0$ entonces la salida es ese mismo número x.

Aunque este programa está perfectamente bien definido, podríamos intentar modificarlo de modo tal que el valor de salida sea siempre igual al valor de la entrada. Este objetivo puede lograrse así:

(b) [A] Si $X \neq 0$ GOTO B

$Z \Leftarrow Z + 1$

Si $Z \neq 0$ GOTO L

[B] $X \Leftarrow X - 1$

$Y \Leftarrow Y + 1$

$Z \Leftarrow Z + 1$

Si $Z \neq 0$ GOTO A

El programa (b) copia el valor de X en la variable Y, cualquiera que sea el valor inicial de X.

Observemos el efecto de las siguientes dos instrucciones sucesivas de este programa:

$Z \Leftarrow Z + 1$

Si $Z \neq 0$ GOTO L

La primera instrucción garantiza que el valor de Z será distinto de 0 y en consecuencia la segunda nos deriva siempre a la instrucción L. El resultado neto de ambas instrucciones es «saltar» a la instrucción marcada con L. Esto justifica resumir este par de instrucciones en una sola:

GOTO L

Ahora bien, cuando el programa (b) termina su cómputo, el valor final de X es 0. Nos gustaría ahora obtener un programa que le asigne a Y el valor de X, pero que deje a este último sin alterar. Esto se puede lograr así:

(c) [A] Si $X \neq 0$ GOTO B

GOTO C

[B] $X \Leftarrow X - 1$

$Y \Leftarrow Y + 1$

$Z \Leftarrow Z + 1$

GOTO A

[C] Si $Z \neq 0$ GOTO D

GOTO E

[D] $Z \Leftarrow Z - 1$

$X \Leftarrow X + 1$

GOTO C

Nótese que, como ninguna instrucción tiene la etiqueta E, la instrucción GOTO E del programa (c) equivale a FINALIZAR.

Podemos abreviar el resultado neto del programa (c) con $Y \Leftarrow X$ (que significa que se le asigna a Y el valor de X). Esto justifica la introducción de la siguiente abreviatura (o *subrutina*):

$$V \Leftarrow V'$$

que le asigna a V el valor de la variable V' y deja a esta última sin cambio.

Donde aparezca $V \Leftarrow V'$ deberá leerse, entonces, una copia del programa (c) en la que las variables han sido renombradas convenientemente. Una observación que debe hacerse es que el programa (c) funciona correctamente solamente si las variables Y y Z valen inicialmente cero. Antes de usar el programa (c) como subrutina de un programa mayor debemos entonces asegurarnos de que Y y Z valen cero. Para ello introducimos la subrutina:

$$V \Leftarrow 0$$

que es una abreviatura de:

[L] $V \Leftarrow V - 1$

Si $V \neq 0$ GOTO L

cuyo resultado es asignarle a la variable V el valor 0. Podemos decir entonces que la subrutina $V \Leftarrow V'$ es una abreviatura del programa (c) en la que X es reemplazada por

V', Y es reemplazada por V y en la que previamente nos aseguramos de que tanto Y como Z valgan 0:

$V \Leftarrow 0$
$Z \Leftarrow 0$
[A] Si $V' \neq 0$ GOTO B
GOTO C
[B] $V' \Leftarrow V' - 1$
$V \Leftarrow V + 1$
$Z \Leftarrow Z + 1$
GOTO A
[C] Si $Z \neq 0$ GOTO D
GOTO E
[D] $Z \Leftarrow Z - 1$
$V' \Leftarrow V' + 1$
GOTO C

Para ejemplificar la potencia de nuestro lenguaje de programación, escribiremos ahora programas que realizan las operaciones de suma y de multiplicación.

El siguiente es un programa que calcula $X_1 + X_2$:

(d) $Y \Leftarrow X_1$
$Z \Leftarrow X_2$
[B] Si $Z \neq 0$ GOTO A
GOTO E
[A] $Z \Leftarrow Z - 1$
$Y \Leftarrow Y + 1$
GOTO B

Mientras que el siguiente es un programa que calcula $X_1 \cdot X_2$:

(e) $Z_2 \Leftarrow X_2$
[B] Si $Z_2 \neq 0$ GOTO A

```
        GOTO E
[A]     Z2 ⇐ Z2 − 1
        Z1 ⇐ X1 + Y
        Y ⇐ Z1
        GOTO B
```

Por supuesto, $Z_1 \Leftarrow X_1 + Y$ no es una instrucción de nuestro lenguaje sino un llamado al programa (d), que es usado en este caso como subrutina de (e). Dejamos como ejercicio la comprobación de que los programas (d) y (e) en efecto permiten sumar y multiplicar.

Dado un programa P, llamaremos un *estado* de P a una lista de ecuaciones de la forma $V = m$ donde V es una variable del programa y m es un número natural. En un estado debe haber exactamente una ecuación por cada una de las variables.

Supongamos que se está ejecutando el programa y que σ es alguno de los estados que atraviesa. Nos gustaría saber cuál será el estado inmediato siguiente. Para ello necesitamos conocer cuál es la instrucción que está a punto de ser ejecutada. Esta idea justifica la siguiente definición:

> **Definición:** Una *descripción instantánea* (o más simplemente una *instantánea*) de un programa P con n instrucciones es un par (i, σ) con $1 \leq i \leq n + 1$ y donde σ es un estado del programa.

Intuitivamente, esto corresponde a una «foto» del cómputo en un momento dado, σ muestra el valor de todas las variables del programa en ese momento en particular y el número i indica la instrucción que va a ejecutarse a continuación (suponemos que las instrucciones están numeradas correlativamente de 1 a n).

Cuando $i = n + 1$, esto indica que el programa se detiene. En ese caso se dice que la instantánea correspondiente es *terminal*.

Si (i, σ) es una instantánea no terminal, llamamos su *instantánea sucesora* a la descripción de la situación del programa una vez que la instrucción número i se ha ejecutado. La instantánea sucesora de (i, σ) es la única instantánea (j, τ) que verifica:

1. Si la i-ésima instrucción de P es del tipo $V \Leftarrow V + 1$ y σ contiene la ecuación $V = m$ entonces $j = i + 1$ y τ se obtiene de σ reemplazando la ecuación $V = m$ por $V = m + 1$.

2. Si la i-ésima instrucción de P es del tipo $V \Leftarrow V - 1$ y σ contiene la ecuación $V = m$ entonces $j = i + 1$ y τ se obtiene de σ reemplazando la ecuación $V = m$ por $V = m - 1$ si es que $m \neq 0$. Si $m = 0$ entonces $\tau = \sigma$.

3. Si la i-ésima instrucción de P es del tipo «Si V $\neq$ 0 GOTO L» entonces $\tau = \sigma$ y hay dos subcasos para considerar:

   a) Si σ contiene la ecuación V = 0, entonces $j = i + 1$.

   b) Si σ contiene la ecuación V = m con m $\neq$ 0 y hay una instrucción marcada con L entonces j es el número de la instrucción así marcada. Si σ contiene la ecuación V = m con $m \neq 0$ y no hay una instrucción marcada con L, entonces $j = n + 1$.

Un *cómputo* de un programa P está formado por sus sucesivas descripciones instantáneas desde que se ingresa la entrada hasta que se obtiene una salida.[18] Con más precisión, un *cómputo* de P es una sucesión finita $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_m$ de instantáneas del programa tal que:

1. $s_1 = (1, \sigma_1)$ y en σ_1 las variables tienen sus valores iniciales ($X_1, \ldots, X_r$ los valores de la entrada y las demás el valor 0).
2. s_m es una instantánea terminal.
3. Para cada k entre 1 y $m - 1$, la instantánea s_{k+1} es sucesora de la instantánea s_k.

Estamos ahora en condiciones de demostrar el teorema principal de este capítulo.

Teorema: Si la concatenación es expresable entonces toda propiedad recursiva es expresable.

Demostración: Recordemos que una propiedad es recursiva si y sólo si existe un programa P (escrito en el lenguaje que hemos definido en este capítulo) que comprueba en una cantidad finita de pasos si esa propiedad se cumple, o no se cumple. Este programa admite una entrada formada por r números $x_1, \ldots, x_r$ y su salida es 1 si $x_1, \ldots, x_r$ cumplen la propiedad y 0 en caso contrario.[19]

Fijado un tal programa P, la demostración consiste en probar que la condición «En el programa P la entrada $x_1, \ldots, x_r$ tiene valor de salida 1» es expresable en el lenguaje de la concatenación dada por raya y punto (– y •).

Para comenzar la demostración vamos a asignarle a cada instantánea de P un número natural que estará escrito con rayas y puntos. Para este propósito consideremos una función, a la que llamaremos R(n), que a cada número n le asigna el número que, escrito con rayas y puntos, está formado por $n + 1$ rayas. Por ejemplo:

R(0) = –
R(1) = ––
R(2) = –––
R(3) = ––––

Afirmación: La función R es expresable en el lenguaje de la concatenación.

Demostremos la afirmación. El par ordenado (n, m), para números naturales cualesquiera n y m, se escribe en el lenguaje formal como # # **n** # **m** # #. La sucesión formada por los pares (n_1, m_1), (n_2, m_2), …, (n_k, m_k) se escribe como # # $\mathbf{n_1}$ # $\mathbf{m_1}$ ## $\mathbf{n_2}$ # $\mathbf{m_2}$ ## … ## $\mathbf{n_k}$ # $\mathbf{m_k}$ # #. Es fácil ver que «Ser un par ordenado» y «Ser una sucesión de pares» son ambas expresables en el lenguaje de la concatenación. (¡Pensarlo!).

Consideremos ahora una sucesión finita de pares de números que cumpla estas dos condiciones (que son ambas expresables):

1. La sucesión comienza con (0, –). Aquí «–» debe pensarse como el dígito concreto elegido para la concatenación. Por ejemplo, si la elección fuera la del capítulo 7 (donde – es 1) entonces la sucesión comienza con (0, 1).
2. Si (k, r) está en la sucesión entonces el siguiente par es $(k + 1, r–)$. Donde $r–$ indica la concatenación de r con el dígito –.

Una sucesión que cumpla estas dos condiciones comienza con:

(0, –)
(1, ––)
(2, –––)
(3, ––––)

Es claro entonces que $R(n) = m$ si y sólo si «Existe una sucesión de pares que cumple las condiciones 1 y 2, y que termina con (n, m)». Como esta propiedad puede expresarse a partir de la concatenación entonces «$R(x) = y$» es expresable, y de este modo la afirmación queda probada.

Como ya hemos visto al dar la definición de instantánea, podemos suponer que las instrucciones de un programa están numeradas correlativamente desde 1 hasta n y que el número $n + 1$ corresponde a la instrucción terminal, que ordena la detención del cálculo.

Además de esta numeración, a cada instrucción le asignaremos un segundo número, que identificará cuál es su etiqueta, si es que la tiene. Para esto las etiquetas

también se numeran correlativamente: 1, 2, 3,… A las instrucciones sin etiqueta les asignamos el número 0 y a la instrucción terminal, la etiqueta $n + 1$.

Consideremos $s = (i, \sigma)$ una instantánea de P y sean y, x_1, …, x_r, z_1, …, z_k los valores de las variables en σ. Entonces a la instantánea s le asignaremos el número:

$$\bullet \mathrm{R}(i) \bullet \mathrm{R}(e_i) \bullet \mathrm{R}(y) \bullet \mathrm{R}(x_1) \bullet \ldots \bullet \mathrm{R}(x_r) \bullet \mathrm{R}(z_1) \bullet \ldots \bullet \mathrm{R}(z_k) \bullet$$

donde e_i es el número de la etiqueta que corresponde a la instrucción i.

Fijado el programa P, el número de una instantánea comienza y termina con un punto, no tiene dos puntos consecutivos y tiene $r + k + 3$ bloques de la forma $\bullet \mathrm{R}(n_j) \bullet$ para algún número n_j. Como $r + k + 3$ es un número fijo (dado que P está fijo) entonces todas estas condiciones son traducibles al lenguaje de la concatenación, por lo que «Ser el número de una instantánea» es expresable.

Debemos ver ahora que «Ser números de instantáneas consecutivas» es también expresable. Para ello debemos verificar que, dado una instantánea s, las tres condiciones que definen a la instantánea sucesora de s son todas expresables en el lenguaje de la concatenación.

Para los valores de i que corresponden a instrucciones del tipo «$V \Leftarrow V + 1$», el número de la instantánea sucesora de s se obtiene reemplazando $\mathrm{R}(v)$ por $\mathrm{R}(v + 1)$ y $\mathrm{R}(i)$ por $\mathrm{R}(i + 1)$. Nótese que, cualquiera que sea n, $\mathrm{R}(n + 1)$ es la concatenación de $\mathrm{R}(n)$ y una raya. Además el reemplazo de $\mathrm{R}(v)$ por $\mathrm{R}(v + 1)$ y de $\mathrm{R}(i)$ por $\mathrm{R}(i + 1)$ se expresa así: si el número de s es igual a

$$\bullet \mathrm{R}(i) \bullet n \bullet \mathrm{R}(v) \bullet m \bullet$$

para ciertos n y m, entonces el número de la instantánea sucesora de s es

$$\bullet \mathrm{R}(i + 1) \bullet n \bullet \mathrm{R}(v + 1) \bullet m \bullet$$

para los mismos n y m.

Dejamos como ejercicio la verificación de que con los otros dos tipos de instrucciones se puede proceder de manera similar. Por lo tanto, «Ser números de instantáneas consecutivas» es también expresable.

Finalmente, a un cómputo s_1, s_2, s_3, …, s_m le asignamos la concatenación de los números de sus instantáneas. El número de un cómputo queda caracterizado por estas condiciones:

1. El número comienza con: $\bullet \mathrm{R}(1) \bullet \mathrm{R}(e_i) \bullet \mathrm{R}(0) \bullet \mathrm{R}(x_1) \bullet \ldots \bullet \mathrm{R}(x_r) \bullet \mathrm{R}(0) \bullet \ldots \bullet \mathrm{R}(0) \bullet$ (para x_1, …, x_r cualesquiera).

2. Existen y, u_1, …, u_r, w_r, …, w_k tales que el número finaliza con: $\bullet \mathrm{R}(n + 1) \bullet \mathrm{R}(n + 1) \bullet \mathrm{R}(y) \bullet \mathrm{R}(u_1) \bullet \ldots \bullet \mathrm{R}(u_r) \bullet \mathrm{R}(w_r) \bullet \ldots \bullet \mathrm{R}(w_k) \bullet$, donde n es la cantidad de instrucciones de P.

3. El número no tiene tres puntos consecutivos, y si contiene a • *n* • • *m* • entonces *n* y *m* son números de instantáneas consecutivas.

Que un número *a comience* con *b* significa que existe algún *q* tal que $a = bq$. Que un número *a finalice* con *b* significa que existe algún *p* tal que $a = pb$. Todas estas condiciones pueden traducirse al lenguaje de la concatenación, por lo que «Ser el número de un cómputo de P» es expresable.

Observemos ahora que «En el programa P la entrada $x_1, \ldots, x_r$ tiene valor de salida 1» equivale a decir que existe el número de un cómputo que comienza con:

$$\bullet\ \mathrm{R}(1) \bullet \mathrm{R}(e_1) \bullet \mathrm{R}(0) \bullet \mathrm{R}(x_1) \bullet \ldots \bullet \mathrm{R}(x_r) \bullet \mathrm{R}(0) \bullet \ldots \bullet \mathrm{R}(0) \bullet$$

y que existen $u_1, \ldots, u_r, w_r, \ldots, w_k$ tales que el número finaliza con:

$$\bullet\ \mathrm{R}(n + 1) \bullet \mathrm{R}(n + 1) \bullet \mathrm{R}(1) \bullet \mathrm{R}(u_1) \bullet \ldots \bullet \mathrm{R}(u_r) \bullet \mathrm{R}(w_r) \bullet \ldots \bullet \mathrm{R}(w_k) \bullet$$

Estas condiciones también son expresables y por lo tanto «En el programa P la entrada $x_1, \ldots, x_r$ tiene valor de salida 1» es expresable en el lenguaje de la concatenación. ■

Notemos que el mismo razonamiento prueba que todas las funciones recursivas de una variable son expresables. En efecto, si *f* es recursiva y P es un programa que la calcula, entonces «$f(x) = y$» equivale a «En el programa P la entrada *x* tiene valor de salida *y*». Esto demuestra, en particular, que la función diagonal (que definimos en el capítulo 5) es expresable.

Se completa así la demostración de los teoremas de Incompletitud que iniciamos en el capítulo 5.

—— Fin ——

Nota: Nuestra demostración de los teoremas de Incompletitud podría ser objeto de la siguiente crítica: es una demostración que se basa en la manera en que se escriben los números, y no en propiedades intrínsecas de éstos. Este «defecto» será salvado en el próximo capítulo, en el que daremos una definición más amplia de la noción de concatenación. Allí veremos que hay concatenaciones intrínsecas, que no dependen de la escritura, y que permiten desarrollar sin cambio alguno las demostraciones que hemos dado para los teoremas de Incompletitud.

La codificación que Gödel definió en su artículo de 1931 es diferente de la que hemos definido en el capítulo 5. Gödel le asigna a cada símbolo del lenguaje un número impar (por ejemplo, al símbolo 0 le asignaría el número 1, al símbolo S le asignaría el 3, y así sucesivamente). Si una expresión del lenguaje está formada por

los símbolos de códigos n, m, k,… entonces su código es $2^n \cdot 3^m \cdot 5^k \cdot \ldots$ (las bases de las potencias son primos correlativos y los exponentes los códigos de los símbolos).

Observemos que un número es el código de una expresión si en su factorización aparecen primos correlativos desde el 2 en adelante elevados todos ellos a potencias impares. (Como el 2 siempre aparece en la factorización, el código de una expresión es en todos los casos un número par).

A la sucesión formada por las expresiones de códigos u, v, w,… respectivamente, Gödel le asigna el código $2^u \cdot 3^v \cdot 5^w \cdot \ldots$ Notemos que el código de una sucesión de fórmulas también tiene en su factorización primos correlativos desde el 2 en adelante, pero en este caso los exponentes son todos números pares (porque son los códigos de expresiones).

Para esta codificación, como para la codificación definida en el capítulo 5, puede probarse que «Ser el código de una fórmula» y «Ser el código de una demostración» son ambas propiedades recursivas.

Esta codificación es intrínseca, porque se basa en la propiedad de que todo número mayor que 1 admite una factorización en primos. La unicidad de la factorización asegura que si n es el código de una expresión —o de una sucesión de expresiones—, esta expresión —o esta sucesión de expresiones— puede ser reconstruida sin ambigüedad. (En el capítulo 5 la no ambigüedad estaba garantizada por la unicidad de la escritura como puntos y rayas).

Por otra parte, en el mismo artículo de 1931 Gödel hace la observación de que su demostración es constructiva. Es decir, si se siguen cuidadosamente todos los pasos de la prueba, puede escribirse explícitamente un enunciado indecidible.

La demostración que hemos desarrollado aquí también es constructiva: si nos dan explícitamente el programa que verifica si un número natural es, o no es, el número de Gödel de un axioma, y este programa está escrito en el lenguaje que hemos mostrado en este capítulo, entonces los enunciados indecidibles de los capítulos 5 y 6 pueden ser escritos explícitamente en el lenguaje formal.

El enunciado indecidible del capítulo 5 es «$\neg\exists x(x \text{ Dem } \mathrm{d}(\mathbf{n}))$», que significa «Yo no soy demostrable». Parece una afirmación simple, pero esta apariencia es engañosa. La escritura formal de «$x \text{ Dem } \mathrm{d}(\mathbf{n})$» contiene, por ejemplo, la descripción del programa que calcula la función diagonal, así como la del programa que determina si un número es, o no es, el código de un axioma (este programa puede ser muy complejo si los axiomas tienen una estructura sintáctica compleja).

Por lo tanto, la traducción exhaustiva al lenguaje formal de «Yo no soy demostrable», lejos de ser sencilla, podría dar como resultado una fórmula con una longitud de miles de símbolos.

TERCERA PARTE

Incompletitud en un contexto general y abstracto

CAPÍTULO NUEVE

INCOMPLETITUD EN UN CONTEXTO GENERAL Y ABSTRACTO

Una demostración intrínseca del Teorema de Gödel. La concatenación y el argumento de Gödel. Conclusiones y preguntas abiertas. Ejercicios.

> ¿Pero si el mundo no es un rompecabezas cuyas piezas sueltas tenemos ante nosotros, sino una sopa en la cual nadan al azar unos fragmentos que sólo por casualidad se congregan de vez en cuando para formar un conjunto coherente? […] Perfección, completitud, belleza, ¡no son más que una excepción rara que sólo se presenta porque la cantidad de fragmentos es inimaginable!
>
> STANISLAW LEM
> *La investigación*

Nuestro objetivo general en este capítulo es investigar a qué clase de objetos matemáticos puede extenderse la demostración de la versión semántica del Teorema de Incompletitud que dimos en el capítulo 5.

Recordemos que si **O** es un objeto, llamamos *teoría de* **O** —y notamos *T*(**O**)— al conjunto de todos los enunciados de primer orden verdaderos en **O**.

La demostración que hemos dado del Teorema de Gödel se basa enteramente en el hecho de que hay una concatenación en la aritmética, expresable en términos de la suma y la multiplicación. Esencialmente hemos probado que si hay una concatenación expresable en **N** entonces *T*(**N**) no es recursivamente axiomatizable:

Hay una concatenación expresable en **N**	→	*T*(**N**) no es recursivamente axiomatizable

En la primera sección nos proponemos introducir una definición abstracta del concepto de concatenación, que es aplicable en principio a un objeto matemático cualquiera. Veremos allí que la demostración de incompletitud desarrollada en el capítulo 5 puede generalizarse en el siguiente sentido:

> Si hay una concatenación expresable en **O**, entonces la teoría *T*(**O**) de ese objeto no es recursivamente axiomatizable.

Es decir, probaremos que también para un objeto matemático **O** (numerable) cualquiera vale que:

Hay una concatenación expresable en **O** → *T*(**O**) no es recursivamente axiomatizable

(Intuitivamente, una operación es *expresable* en **O** si puede traducirse en el lenguaje de ese objeto; en la primera sección explicaremos con más precisión este concepto).

Esta generalización, a su vez, nos permitirá responder a la posible objeción que mencionamos en el final del capítulo anterior: mostraremos una concatenación expresable en **N** que *no depende* del modo en que se representen los números naturales.

Una pregunta que surge naturalmente es si valdrá la afirmación recíproca. ¿Será cierto que si la teoría de un objeto **O** no es recursivamente axiomatizable entonces necesariamente hay en **O** una concatenación expresable?

Es decir, ¿será cierto que

T(**O**) no es recursivamente axiomatizable → Hay una concatenación expresable en **O**?

Nuestra conjetura es que la respuesta es negativa, pero la pregunta, hasta donde sabemos, permanece abierta. En la última sección diremos algo más sobre esto.

Podemos, sin embargo, plantear una nueva pregunta, con una hipótesis adicional:

Supongamos que la teoría de un objeto **O** no es recursivamente axiomatizable y que *además* se puede dar una demostración basada en el hecho de que «Ser demostrable» es expresable. Bajo esta suposición adicional, ¿existe necesariamente en **O** una concatenación expresable?

Probaremos en la segunda sección que la respuesta es *sí*.

Esta respuesta afirmativa nos permitirá comparar dos argumentos diferentes que prueban el Teorema de Gödel: uno de ellos es el que ya hemos visto, basado en la paradoja del mentiroso, el otro es un argumento alternativo basado en la llamada *paradoja de Berry* (véanse [Caicedo] y [Boolos]). Demostraremos que ambos argumentos son equivalentes, en el sentido de que ambos pueden extenderse a la misma clase de objetos matemáticos: aquellos en los que hay una concatenación expresable.

(El teorema principal de la primera sección es ya conocido, esencialmente es consecuencia de [Quine]. Los resultados de las secciones segunda y tercera son, hasta donde sabemos, originales).

§ 1. Una demostración intrínseca del Teorema de Gödel

Vimos en los capítulos anteriores que la existencia de una concatenación expresable en **N** es suficiente para demostrar que *T*(**N**) no es recursivamente axiomatizable. En

esta sección vamos a generalizar esta demostración a un objeto matemático (numerable) cualquiera.

Necesitamos entonces extender la definición de verdad que dimos en el capítulo 3 para **N** a otros objetos matemáticos y también establecer una definición *abstracta* de concatenación que sea aplicable en contextos donde no necesariamente tendremos las operaciones de suma y multiplicación.

Un *objeto matemático* **O** (o, más simplemente, un *objeto*) es un par (U; R) donde U, el *universo* del objeto, es un conjunto no vacío y R es un conjunto recursivo de funciones, relaciones y constantes de U. Ya que tratamos con objetos matemáticos, asumiremos implícitamente que R siempre contiene la relación de igualdad. Llamaremos *lenguaje del objeto* **O** (y notamos *L*(**O**)) al lenguaje de primer orden que tenga los símbolos correspondientes para designar las funciones, relaciones y constantes de **O**.

Supondremos en todo lo que sigue que U es *numerable*, es decir, que existe una correspondencia *uno a uno* entre U y el conjunto de los números naturales (es decir, una correspondencia que asocia cada elemento de U con un número natural diferente, y viceversa).

Supondremos también que R es finito o numerable. Por ejemplo, en el objeto **N** (tal como hemos trabajado con él a lo largo de todo el libro) el universo es el conjunto de los números naturales y R está formado por la constante 0, la función sucesor y las operaciones de suma y multiplicación.

Si **O** es un objeto matemático con lenguaje *L*(**O**) llamamos *Teoría de* **O** —y notamos *T*(**O**)— al conjunto de todos los enunciados de primer orden de *L*(**O**) verdaderos en **O**.

La pregunta fundamental que vamos a plantearnos es si *T*(**O**) es *recursivamente axiomatizable*. Es decir, si existe un conjunto recursivo de enunciados verdaderos en **O** que permita obtener como teoremas a todos los demás enunciados verdaderos.

La definición de *verdad* para un objeto cualquiera es similar a la que dimos en el capítulo 3, aunque previamente debe hacerse una precisión importante. Recordemos que el enunciado ∀*x*P(*x*) es *verdadero* en **N** si, cualquiera que sea el numeral **k**, vale que P(**k**) es un enunciado verdadero.

Una suposición implícita en esta definición es que todo número natural está representado por algún numeral, es decir, que para todo elemento del universo hay un término sin variables que lo representa. (Recordemos, del capítulo 3, que *términos sin variables* son las constantes y las expresiones del lenguaje que se obtienen de las constantes por aplicaciones sucesivas de las funciones del objeto).

Esta suposición no necesariamente se cumple para todos los objetos. Por ejemplo, sea **O** = (Q; +,·, 0), donde Q es el conjunto de todos los números racionales. Los términos sin variables del lenguaje de este objeto se obtienen a partir del 0 por aplicaciones sucesivas de las operaciones de suma y multiplicación. Es evidente

entonces que todos los términos sin variables representan al número 0. Y por lo tanto, para un número distinto de cero no hay término sin variables que lo represente.

Sin embargo, esta situación se puede «arreglar» del siguiente modo indirecto. Si **O** = (U; R) es un objeto matemático cualquiera, llamaremos $\overline{\mathbf{O}}$ al objeto cuya única diferencia con **O** es que tiene añadido a su lenguaje constantes que representan a todos los elementos de U.

Así, en $\overline{\mathbf{O}}$ sí vale que todo elemento está representado por un término sin variables. Observemos además que una fórmula en $L(\mathbf{O})$ es también una fórmula en $L(\overline{\mathbf{O}})$.

Vamos a definir qué significa que una fórmula sea *verdadera en* $\overline{\mathbf{O}}$.

Tal como hicimos para **N** en el capítulo 3, definimos primero qué significa que un enunciado atómico sea verdadero. Los enunciados atómicos de $\overline{\mathbf{O}}$ son de la forma:

$$t_1 = t_2$$

donde t_1 y t_2 son términos sin variables o también:

$$P(t_1, \ldots, t_n)$$

donde P es uno cualquiera de los símbolos de relación de R.

Si el enunciado atómico es de la forma $t_1 = t_2$, diremos que es *verdadero* si y sólo si el término t_1 y el término t_2 representan el mismo elemento.

Si el enunciado atómico es de la forma $P(t_1, \ldots, t_n)$, diremos que es *verdadero* si y sólo si los elementos representados por $t_1, \ldots, t_n$ satisfacen la relación específica en **O** asociada al símbolo P.

A partir de este criterio para determinar la verdad de un enunciado atómico, la definición de *verdad* para una fórmula cualquiera de $\overline{\mathbf{O}}$ sigue los mismos pasos que la definición que dimos para **N**, sólo que los numerales **0**, **1**, **2**, **3**, **4**,… son reemplazados por las constantes c_1, c_2, c_3, c_4,…

Una vez definida la verdad en $\overline{\mathbf{O}}$ de esta manera, podemos definir ahora la verdad en **O**:

> Si φ es una fórmula de $L(\mathbf{O})$, decimos que φ es *verdadera* en **O** si y sólo si φ es verdadera en $\overline{\mathbf{O}}$.

Así, por ejemplo, el enunciado ∀xP(x) es verdadero en **O** si y sólo si P(c_1), P(c_2), P(c_3),… son todos enunciados verdaderos en $\overline{\mathbf{O}}$.

Definición. Una propiedad es *expresable* en **O** si existe una fórmula $P(x_1, \ldots, x_r)$ de $L(\mathbf{O})$ tal que los elementos $a_1, \ldots, a_r$ cumplen la propiedad P si y sólo si $P(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_r})$ es un enunciado verdadero en **O**.

(En rigor deberíamos decir que $a_1, \ldots, a_r$ cumplen la propiedad P si y sólo si $P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_r})$ es un enunciado verdadero de **O** donde $c_{a_1}, \ldots, c_{a_r}$ son constantes que representan a $a_1, \ldots, a_r$, respectivamente).

Daremos ahora la definición abstracta de concatenación. La idea que motiva esta definición es que una concatenación debe ser siempre una operación binaria isomorfa a la concatenación de símbolos de un lenguaje formal. Observemos que en este caso, el más conocido, se verifica que:

1. La operación es asociativa: si E_1, E_2 y E_3 son expresiones del lenguaje, entonces concatenar E_1E_2 con E_3 es lo mismo que concatenar E_1 con E_2E_3.
2. Los símbolos del lenguaje actúan como *átomos* de la operación, en el sentido de que no pueden escribirse como concatenación de elementos más simples.
3. Cualquier expresión del lenguaje se obtiene, de manera única, como la concatenación de una cantidad finita de estos átomos.

Definición. Una *concatenación* en un objeto **O** = (U; R) es una operación (que indicaremos como «∘») definida para todos los pares de elementos de un cierto conjunto V contenido en U, que verifica estas condiciones:

1. La concatenación de dos elementos de V es también un elemento de V.
2. La operación es asociativa, es decir $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
3. Existen ciertos elementos de V, a los que llamaremos *átomos*, que no se pueden obtener como concatenación de otros elementos de V.
4. Todo elemento de V, o bien es un átomo, o bien se obtiene de manera única como concatenación de una cantidad finita de átomos. La unicidad debe entenderse en el siguiente sentido estricto: si $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ son todos átomos tales que $a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n = b_1 \circ b_2 \circ \ldots \circ b_m$ entonces $n = m$, y además $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$,…

La importancia crucial de la unicidad de escritura enunciada en la condición 4 ha sido ya discutida en el capítulo 5. Observemos además que esta condición no puede ser

expresada en un lenguaje de primer orden, porque involucra la noción de *cantidad finita* de elementos (véase [Chang y Keisler]).

En [Wasserman] se exhibe una caracterización alternativa (en un lenguaje de segundo orden) de la operación de concatenación, que es equivalente a la que aquí presentamos.

Definición. La concatenación «∘» es *expresable* en **O** si:

1. «Ser un elemento de V» es expresable en **O**.
2. La relación «$z = x \circ y$» es expresable en **O**.

Definición. Dada una fórmula P(x) en L(**O**) y un elemento c del universo de **O**, diremos que P(x) *define* a c si éste es el único elemento que, al ser reemplazado por x, convierte a P(x) en un enunciado verdadero.

En otras palabras, P(x) define al elemento c si $P(c) \bigwedge \forall x(P(x) \rightarrow x = c)$ es un enunciado verdadero en **O**.

Un elemento c es *definible* en **O** si existe una fórmula en L(**O**) que lo define.

Por ejemplo, si c está representado por el término sin variables t entonces la fórmula $x = t$ define a c y por lo tanto c es definible.

Observación. Nuestra definición de concatenación admite la posibilidad de que la operación tenga sólo un átomo. Sin embargo, la existencia en **O** de una concatenación expresable con solamente un átomo es insuficiente para asegurar que T(**O**) no es recursivamente axiomatizable.

En efecto, si ese único átomo es − y equiparamos

$$- = 1$$
$$-- = 2$$
$$--- = 3$$

y así sucesivamente, entonces concatenar rayas equivale a sumar números.

La teoría de la concatenación de un solo átomo es equivalente a la teoría del objeto **O** = ({1, 2, 3,…}; +, 1), la llamada *aritmética de Presburger*. Pero esta teoría *es* recursivamente axiomatizable [Presburger].

En cambio, si hay una concatenación con al menos dos átomos que sea expresable en **O**, y al menos dos de esos átomos son definibles, entonces podemos reproducir para T(**O**) el razonamiento que prueba que **T**(**N**) no es recursivamente axiomatizable. Tenemos así el siguiente teorema:

Teorema 9.1: Si hay una concatenación con al menos dos átomos que es expresable en **O**, y al menos dos de los átomos son definibles, entonces *T*(**O**) no es recursivamente axiomatizable.

Demostración: Observemos para comenzar que «*x* es un átomo» es expresable, ya que equivale a:

$$x \in \mathrm{V} \bigwedge \neg\exists u \exists v(u \in \mathrm{V} \bigwedge v \in \mathrm{V} \bigwedge x = u \circ v)$$

Además «*u* es un átomo en la escritura de *x*» también es expresable, dado que equivale a «*u* es un átomo que está al comienzo, al final o en medio de la escritura de *x*» y esta condición se traduce como:

$$x \in \mathrm{V} \bigwedge \text{«}u \text{ es un átomo»} \bigwedge \exists y(x = u \circ y \bigvee x = y \circ u) \bigvee \exists y \exists z(x = z \circ u \circ y)$$

Si llamamos raya y punto respectivamente a dos de los átomos definibles de la concatenación entonces «*x* es concatenación de puntos y rayas» es expresable porque equivale a:

Si u es un átomo en la escritura de x entonces $u = \bullet$ o $u = -$

Si $\bullet$ y $-$ están representados por términos sin variables, entonces en la traducción al lenguaje formal de la expresión «$u = \bullet$ o $u = -$» los símbolos $\bullet$ y $-$ deben ser reemplazados por esos términos que los representan. Si $\bullet$ y $-$ están definidos por las fórmulas P y Q respectivamente entonces se debe escribir «$\exists x((u = x \bigwedge \mathrm{P}(x)) \bigvee (u = x \bigwedge \mathrm{Q}(x)))$».

Basados en punto y raya definimos una *codificación de Gödel* en **O** análoga a la numeración de Gödel que definimos en el capítulo 5, con la única diferencia de que punto y raya ya no son números naturales, sino elementos del universo de **O**.

Para esto agregamos al lenguaje de **O** el símbolo # (que sirve para representar sucesiones de expresiones) y ordenamos todos los símbolos según el orden del diccionario o *lexicográfico*. Al primer símbolo le asignamos como código el elemento de V que se escribe $-\bullet$, al segundo le asignamos el elemento $--\bullet$, y así sucesivamente. A la concatenación de dos o más símbolos le asignamos la concatenación de sus códigos respectivos.

A partir de aquí la demostración sigue textualmente el argumento del capítulo 5. ■

Una primera consecuencia del teorema 9.1 es la posibilidad de dar una demostración del Teorema de Incompletitud basada en una concatenación *intrínseca*, en el sentido de que no depende de la manera elegida para escribir a los números (no depende de si se utiliza la representación decimal, la binaria, la binaria sin cero, o si se utiliza la

escritura maya o la romana). De este modo se responde a la posible crítica mencionada en la nota final del capítulo anterior.

Corolario. Las demostraciones que hemos dado, en los capítulos 5 y 6, de los teoremas de Gödel para **N** pueden desarrollarse a partir de propiedades intrínsecas.

Demostración: Por el teorema 9.1 basta ver que existe en **N** una concatenación intrínseca que es expresable.

Consideramos el conjunto V formado por aquellos números naturales que en su factorización tienen primos correlativos desde el 2 en adelante, todos ellos elevados a la potencia 1 o a la potencia 2.

Por ejemplo: $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ es un elemento de V, pero $2 \cdot 5$ no lo es.

La idea, al definir la concatenación, es colocar una secuencia de exponentes a continuación de la otra. Por ejemplo: $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)$ o $(2^2 \cdot 3^2) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13^2$. Los átomos de esta concatenación son 2 y 2^2.

Puede probarse que esta concatenación es expresable en **N**. No daremos aquí la demostración porque usa tecnicismos matemáticos mucho más sofisticados que los que empleamos en la demostración del capítulo 7 (por ejemplo hace uso del llamado Teorema Chino del Resto). Los detalles de la prueba pueden verse en [Smullyan]. ■

Observación: En su artículo original Gödel no habla explícitamente del concepto de concatenación, sin embargo su codificación (que describimos en el comentario final del capítulo anterior) hace uso de la concatenación intrínseca que definimos en el corolario. A cada símbolo del lenguaje Gödel le asigna como código un número impar diferente, a cada expresión le asigna la concatenación de los códigos de los símbolos que la forman y a una sucesión de expresiones le asigna la concatenación de los códigos de las expresiones que la forman. (Gödel no utiliza el símbolo #, que es introducido en [Smullyan]).

Comentario: Todas las concatenaciones con dos átomos son *isomorfas* entre sí, en el sentido de que entre los elementos de dos cualesquiera de ellas es posible establecer una correspondencia «uno a uno» que preserva la operación.

A modo de ejemplo, mostremos la correspondencia entre la concatenación que definimos en el corolario anterior y la concatenación del capítulo 7.

2^1	…	1
2^2	…	2
$2^1 \cdot 3^1$	…	11
$2^1 \cdot 3^2$	…	12
$2^2 \cdot 3^1$	…	21
$2^2 \cdot 3^2$	…	22
$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$	…	111

Aunque habitualmente el exponente 1 no se escribe, en este caso lo hemos indicado para que sea más fácil visualizar la correspondencia. De la misma manera se puede establecer la equivalencia con una concatenación en la que sus átomos se llamen punto y raya.

Atención: Entre las hipótesis del teorema 9.1 se requiere que al menos dos de los átomos de la concatenación sean definibles. Si el objeto **O** no cumple esta hipótesis entonces, en principio, no se puede asegurar que toda propiedad recursiva sea expresable en **O** y falla la Hipótesis 2 de la demostración del capítulo 5.

Consideremos, por ejemplo, el objeto **O** = $(\{a, b\}^+; \circ)$, donde:

- $\{a, b\}^+$ es el conjunto de todas las *palabras* (es decir, secuencias finitas de símbolos) formadas por las letras *a* y *b* como *aaabaa* o *bbb*.
- El símbolo $\circ$ denota la concatenación usual de palabras, que consiste en escribir la segunda a continuación de la primera.

Probaremos después (será una consecuencia de la demostración del teorema 9.2) que ni el átomo *a* ni el átomo *b* son definibles en **O**. Por lo tanto, la propiedad recursiva «Ser el átomo *a*» no es expresable en **O**.

Sin embargo, y a pesar de que no puede utilizarse la demostración del capítulo 5, vale de todos modos que la teoría del objeto **O** = $(\{a, b\}^+; \circ)$ no es recursivamente axiomatizable, como lo prueba el siguiente teorema.

Teorema 9.2: Sea el objeto **O** = $(\{a, b\}^+; \circ)$, donde $\{a, b\}^+$ es el conjunto de todas las palabras formadas por las letras *a* y *b* y $\circ$ es la concatenación usual de palabras. Entonces *T*(**O**) no es recursivamente axiomatizable.

Demostración: Se considera el objeto **O'** = $(\{a, b\}^+; \circ, a, b)$, que sólo difiere de **O** en que a su lenguaje se le agregan las constantes *a* y *b*. A partir de aquí se prueba que podemos reducir este caso al del Teorema 9.1. Los detalles de la demostración los dejamos como ejercicio (véase el Ejercicio 9.1). Probaremos allí también, como corolario, que la propiedad $x = a$ no es expresable en **O** = $(\{a, b\}^+; \circ)$. ■

Podemos demostrar ahora el teorema que anunciamos al comienzo del capítulo.

Definición: Diremos que T(**O**) es *decidible* si existe un programa que, dado un enunciado cualquiera de L(**O**), determina en una cantidad finita de pasos si el enunciado es, o no es, verdadero.

Afirmación: T(**O**) es recursivamente axiomatizable si y sólo si es decidible.

Demostración: Si T(**O**) es recursivamente axiomatizable, fijamos un sistema recursivo de axiomas. Probamos en el capítulo 1 que si el conjunto de axiomas es recursivo entonces existe un programa que, dada una secuencia finita de fórmulas, determina en una cantidad finita de pasos si la secuencia es, o no es, una demostración.

Por otra parte, sabemos del capítulo 3 que para todo lenguaje de primer orden existe un programa que determina en una cantidad finita de pasos si una fórmula es, o no es, un enunciado.

Ordenamos todas las secuencias de fórmulas de L(**O**) según el orden obtenido por el método diagonal de Cantor que se explica en el Ejercicio 1.4 y tomamos un programa que las inspeccione una por una y verifique en cada caso si se trata, o no, de una demostración.

Si la secuencia inspeccionada es una demostración, el programa verifica si la última fórmula es un enunciado. En caso afirmativo, el programa imprime ese enunciado.

Este programa imprimirá solamente enunciados verdaderos en **O** (esto se debe a que el Teorema de Corrección, que demostramos en el capítulo 3 para **N**, vale también para un objeto **O** cualquiera).

Además, como todo enunciado verdadero es demostrable, entonces todo enunciado verdadero será impreso al cabo de una cantidad finita de pasos. En consecuencia:

- Si P es verdadera, será impresa tras una cantidad finita de pasos.
- Si P es falsa, ¬P es verdadera y entonces ¬P será impresa tras una cantidad finita de pasos.

La teoría es entonces decidible porque, dada una fórmula P de L(**O**), el criterio para determinar si P es verdadera o falsa consiste en comprobar si el programa imprime P o si imprime ¬P.

Recíprocamente, si T(**O**) es decidible entonces es recursivamente axiomatizable, ya que en ese caso la axiomatización trivial (es decir, todos los enunciados de L(**O**) que son verdaderos en **O**) es recursiva. ■

Teorema 9.3: Si existe una concatenación expresable en **O** (con al menos dos átomos) entonces *T*(**O**) no es recursivamente axiomatizable.

Demostración: Es fácil ver que si existe en **O** una concatenación expresable con al menos dos átomos, entonces también es expresable la relación «*u* y *v* son átomos y *x* pertenece a $\{u, v\}^+$». Este hecho permite reducir la demostración al caso en el que la concatenación tiene *exactamente* dos átomos. Haremos entonces la prueba para este caso.

Probemos ahora que si existe una concatenación expresable en **O** entonces *T*(**O**) no es recursivamente axiomatizable. De acuerdo con la afirmación anterior basta ver que *T*(**O**) no es decidible.

Sea V el conjunto expresable de **O** en el que está definida una concatenación ∘. La teoría del objeto $\mathbf{O_1}$ = (V; ∘) es *recursivamente equivalente* a la teoría del objeto $\mathbf{O_2} = (\{a, b\}^+; \circ)$, en el sentido de que hay una correspondencia recursiva y uno a uno que transforma cada enunciado verdadero de $L(\mathbf{O_1})$ en un enunciado verdadero de $L(\mathbf{O_2})$, y viceversa. (Esencialmente esto se debe al hecho de que todas las concatenaciones de dos átomos son isomorfas, tal como explicamos en un comentario anterior).

Supongamos, por el absurdo, que *T*(**O**) es decidible. Entonces existe un programa que determina en una cantidad finita de pasos si una fórmula de *L*(**O**) es verdadera o falsa.

Sea P un enunciado cualquiera de $L(\{a, b\}^+; \circ)$. Lo traducimos a su equivalente en *L*(V; ∘) que, en particular, es un enunciado de **O**. El programa para *T*(**O**) nos dice entonces si P es verdadera o falsa. De este modo $T(\{a,b\}^+; \circ)$ sería decidible y en consecuencia sería recursivamente axiomatizable, lo que contradice al teorema 9.2. ■

El teorema 9.3 propone un método para probar que *T*(**O**) no es recursivamente axiomatizable: basta ver que existe en **O** una concatenación expresable con al menos dos átomos.

Aunque no daremos aquí los detalles de las demostraciones, éstos son dos de los muchos ejemplos de objetos a los que este método es aplicable:

1. El objeto **O** = $(\{1, 2, 3, \ldots\}; \cdot, <_p, D)$, donde:

   - $<_p$ es el orden restringido a los números primos, la relación usual «menor que», pero sólo «tenemos derecho» a usarla para comparar primos.

◦ D es la relación «Tienen la misma cantidad de divisores primos».

2. El objeto **O** = ($\{a, b\}^+$; B, E, a, b), donde:

   ◦ $\{a, b\}^+$ es el conjunto de todas las secuencias finitas de letras a y b.
   ◦ La relación B es «ser un prefijo de» (es decir «estar al comienzo de», por ejemplo, *aabba* es un prefijo de *aabbaaaab*).
   ◦ La relación E es «ser un sufijo de» (es decir «estar al final de», por ejemplo, *aabba* es un sufijo de *bbaabba*).

§ 2. La concatenación y el argumento de Gödel

Hemos visto que si existe en **O** una concatenación expresable (con la hipótesis adicional de que al menos dos átomos sean definibles) entonces vale para *T*(**O**) la versión semántica del Teorema de Incompletitud, y la demostración puede seguir el razonamiento del capítulo 5, que llamaremos, de manera informal, *el argumento de Gödel*.

Al repasar la argumentación puede verse que una de las condiciones básicas es que «Ser demostrable», en el sentido preciso de que la relación «*x* es el código de una demostración de la fórmula de código *y*», sea expresable.

Dado que hablamos del código de una fórmula de *L*(**O**) y del código de una demostración, debemos definir, para un objeto matemático cualquiera, qué es una codificación de Gödel.

Definición: Una *codificación de Gödel* en un objeto **O** = (U; R) es un par de funciones, *g* y *h*, tal que *g* le asigna a cada fórmula de *L*(**O**) un elemento de U y *h* le asigna a cada sucesión finita de fórmulas de *L*(**O**) un elemento también de U, llamados, respectivamente, el *código* de la fórmula y el *código* de la sucesión de fórmulas. Suponemos además que:

1. A fórmulas diferentes les corresponden códigos diferentes; a sucesiones de fórmulas diferentes les corresponden códigos diferentes; no puede haber tampoco una fórmula y una sucesión de fórmulas que tengan el mismo código.
2. Existe un programa que, dada una fórmula o una sucesión de fórmulas, calcula su código correspondiente.

3. Existe un programa que, dado un elemento de U, determina si es, o no es, o bien el código de una fórmula o bien el código de una sucesión de fórmulas y, en caso afirmativo, determina cuál es la fórmula o sucesión de fórmulas correspondiente.
4. Todos los códigos son elementos definibles.

Ejemplo: Una codificación de Gödel no tiene por qué estar definida explícitamente a partir de una concatenación.

Supongamos que el objeto es **N**. Ordenemos (por ejemplo según el orden lexicográfico) todas las fórmulas de L(**N**) por un lado y todas las sucesiones finitas de fórmulas de L(**N**) por el otro (según el orden del Ejemplo 1.4).

Luego, asignamos el número 1 a la primera fórmula, el número 3 a la segunda, el 5 a la tercera y así sucesivamente.

A la primera sucesión de fórmulas le asignamos el 2, a la segunda le asignamos el 4 y así sucesivamente.

No es difícil probar que esta asignación es, en efecto, una codificación de Gödel para **N**.

Atención: La definición habitual de «Ser demostrable» es innecesariamente limitada. Como ya sabemos desde el capítulo 1, la definición dice que una fórmula es *demostrable* si es la última fórmula de una demostración.

Necesitamos dar una definición alternativa de «Ser demostrable» que es equivalente a la definición habitual, pero que nos permite considerar demostrable a una fórmula cualquiera que aparezca en una demostración.

Diremos entonces a partir de ahora que una fórmula es *demostrable* si aparece en una demostración, no importa qué posición ocupe dentro de ella.

Intuitivamente, esta definición más laxa dice que al probar un teorema no sólo demostramos su tesis, sino que probamos además todas las afirmaciones intermedias de la demostración.

Esta idea se corresponde perfectamente con la práctica matemática. Por ejemplo el hecho de que la propiedad $x = a$ no es expresable en $\mathbf{O} = (\{a, b\}^+; \circ)$ no es consecuencia de la tesis del teorema 9.2, sino de una afirmación intermedia de la demostración.

Es fácil ver que ambas definiciones de *fórmula demostrable* son equivalentes: una fórmula es demostrable según la definición habitual si y sólo si es demostrable en este nuevo sentido que definimos.

En efecto, es evidente que si una fórmula es demostrable en el sentido habitual entonces también es demostrable en el sentido más amplio.

Recíprocamente, si P es demostrable en el sentido amplio entonces existe una demostración $P_1, \ldots, P_n$ tal que P aparece en ella, es decir, $P = P_k$, con $1 \leq k \leq n$. Entonces $P_1, \ldots, P_k$ es también una demostración y P es entonces demostrable en el sentido habitual.

Además puede probarse que:

- «Ser demostrable (en el sentido más amplio)» es expresable en **O**

es equivalente a la conjunción de:

- «Ser demostrable (en el sentido habitual)» es expresable en **O**
- SF(x, y): «x es el código de una sucesión finita de fórmulas en la que aparece la fórmula de código y» es expresable en **O**

El hecho de que *«Ser demostrable (en el sentido más amplio)» es expresable en* **O** implica que SF(x, y) *es expresable en* **O** será una afirmación intermedia de la demostración del teorema 9.5. Una vez hecha esta observación, la equivalencia entre la primera condición y la conjunción de las otras dos se prueba fácilmente.

En consecuencia, bajo la hipótesis general de que «x es el código de una sucesión finita de fórmulas en la que aparece la fórmula de código y» es expresable, ambos conceptos de demostrabilidad son, a todos los efectos, exactamente iguales.

Ahora que hemos definido qué es una codificación de Gödel y hemos redefinido la relación «Ser demostrable» podemos formular con precisión la pregunta que planteamos en la introducción del capítulo:

¿Será cierto que si existe una codificación de Gödel en **O** tal que para todo conjunto recursivo de axiomas, la relación «x es el código de una demostración en la que aparece y» es expresable, existe entonces en **O** una concatenación expresable?

La respuesta, como veremos en esta sección, es sí.

Es decir, demostraremos que, dado un objeto matemático **O** cualquiera, el argumento de Gödel es aplicable para probar que T(**O**) no es recursivamente axiomatizable si y sólo si existe en **O** una concatenación expresable (con al menos dos átomos definibles).

El siguiente teorema nos servirá como paso previo de la demostración que nos interesa.

Teorema 9.4: Sea O un objeto con una codificación de Gödel tal que:

1. SF(x, y): «x es el código de una sucesión finita de fórmulas en la que aparece la fórmula de código y», es expresable.
2. La función Imp(x, y) que a los códigos de las fórmulas P y Q le asigna el código de la fórmula P → Q es expresable.

Bajo estas condiciones, existe en **O** una concatenación expresable con dos átomos definibles.

Observación: Si g y h son las funciones de la codificación de Gödel, entonces la función Imp(x, y) verifica que Imp(g(P), g(Q)) = g(P → Q).

Demostración: Daremos aquí solamente la idea general. La prueba completa puede verse en el Ejercicio 9.2.

Definiremos explícitamente una operación de concatenación. Para esto fijamos cuatro fórmulas diferentes P_1, P_2, Q y R tales que ninguna de ellas se obtiene como implicación de dos fórmulas de complejidad menor (por ejemplo, podrían ser cuatro fórmulas atómicas).

La concatenación estará definida para los códigos de las fórmulas del tipo:

$$(\ldots(((R \to P_{r_1}) \to P_{r_2}) \to P_{r_3}) \ldots) \to P_{r_n} \text{ con } r_k = 1 \text{ o } r_k = 2$$

En este conjunto de fórmulas se encontrarán, por ejemplo:

$$R \to P_1$$

$$R \to P_2$$

$$(R \to P_1) \to P_1$$

$$(R \to P_1) \to P_2$$

$$(R \to P_2) \to P_1$$

$$(R \to P_2) \to P_2$$

$$((R \to P_1) \to P_1) \to P_1$$

$$((R \to P_1) \to P_1) \to P_2$$

y así sucesivamente. A estas fórmulas las llamaremos *fórmulas concatenables*.

Observemos que hay una clara correspondencia entre las fórmulas concatenables y los números escritos en la base binaria sin cero (que definimos en el capítulo 7). Para establecer la correspondencia consideramos en cada caso la secuencia de los subíndices de las fórmulas P_i:

$R \to P_1$	…	1
$R \to P_2$	…	2
$(R \to P_1) \to P_1$	…	11
$(R \to P_1) \to P_2$	…	12
$(R \to P_2) \to P_1$	…	21
$(R \to P_2) \to P_2$	…	22
$((R \to P_1) \to P_1) \to P_1$	…	111

La operación de concatenación se define de modo que esa correspondencia entre fórmulas y números se conserve:

$$g((\ldots((R \to P_{r_1}) \to P_{r_2}) \to \ldots) \to P_{r_n}) \circ g((\ldots((R \to P_{s_1}) \to P_{s_2}) \to \ldots \to P_{s_m})$$

$$=$$

$$g((\ldots((((R \to P_{r_1}) \to P_{r_2}) \to \ldots) \to P_{r_n}) \to P_{s_1}) \to P_{s_2}) \to \ldots \to P_{s_m})$$

Los átomos son $g(R \to P_1)$ y $g(R \to P_2)$. Ambos son códigos de fórmulas y entonces, por la definición de codificación de Gödel, son definibles.

Por otra parte, llamaremos *contadores* a las fórmulas del tipo:

$$(\ldots(((R \to Q) \to Q) \to Q) \ldots) \to Q$$

Este nombre se debe a que en la demostración del teorema se utilizan para contar la cantidad de fórmulas que hay en una sucesión.

Cada fórmula concatenable tiene dos *fórmulas sucesoras*, que se obtienen al agregar a la derecha las fórmulas $P_1 \circ P_2$. Por ejemplo, las sucesoras de $R \to P_2$ son la fórmula $(R \to P_1) \to P_1$ y la fórmula $(R \to P_1) \to P_2$.

Cada contador tiene una única *fórmula sucesora*, que se obtiene al agregar a la derecha la fórmula Q. Por ejemplo, la sucesora de $R \to Q$ es la fórmula $(R \to Q) \to Q$.

Del hecho de que la implicación es expresable se deduce fácilmente que valen estas dos condiciones:

1. Las operaciones que calculan fórmulas sucesoras (tanto para fórmulas concatenables como para contadores) son expresables.
2. La operación que, dada una fórmula concatenable A y un contador B, da como resultado la fórmula $A \to B$, es expresable.

La primera condición permite demostrar que «Ser una fórmula concatenable» y «Ser un contador» son expresables.

La segunda condición permite demostrar que la relación «Ser dos sucesiones con la misma cantidad de fórmulas» es expresable.

De estos hechos, a su vez, se deduce la tesis, del siguiente modo:

Para expresar la operación $g(\mathrm{F}) \circ g(\mathrm{G})$, donde tanto F como G son fórmulas concatenables, definimos en paralelo dos sucesiones, $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$, ambas de la misma longitud.

La sucesión $\mathbf{S_1}$ describe cómo se obtiene la fórmula G a partir de $\mathrm{R} \to \mathrm{P}_1$ (o de $\mathrm{R} \to \mathrm{P}_2$) por aplicaciones sucesivas de las operaciones que calculan fórmulas sucesoras. A partir de la información que contiene $\mathbf{S_1}$ la sucesión $\mathbf{S_2}$ «copia» la fórmula G a la derecha de F y calcula así $g(\mathrm{F}) \circ g(\mathrm{G})$.

Los detalles pueden verse en el Ejercicio 9.2.

Corolario: Si existe una codificación de Gödel en **O** y cuatro fórmulas atómicas diferentes P_1, P_2, Q y R tales que (si conservamos las notaciones de la demostración anterior):

1. La relación SF(x, y): «x es el código de una sucesión finita de fórmulas en la que aparece la fórmula de código y», es expresable.
2. Las operaciones que calculan fórmulas sucesoras (tanto para fórmulas concatenables como para contadores) son expresables.
3. La operación que, dada una fórmula concatenable A y un contador B, da como resultado la fórmula $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$, es expresable.

Entonces existe en **O** una concatenación expresable con al menos dos átomos definibles.

Demostración: Las tres condiciones que hemos aislado en el corolario aseguran que se puede repetir la parte esencial de la demostración del teorema anterior. ■

Podemos ahora demostrar el teorema que anunciamos: si **O** admite una codificación de Gödel tal que «Ser demostrable» es expresable entonces existe una concatenación expresable en **O** con al menos dos átomos definibles.

Teorema 9.5: Sea **O** un objeto con una codificación de Gödel tal que, para todo conjunto recursivo **A** de fórmulas, la relación «x es el código de una demostración a partir de las fórmulas de **A** e y es el código de una fórmula que aparece en esa demostración» es expresable. Bajo estas condiciones hay en **O** una concatenación expresable (con al menos dos átomos definibles).

Demostración: Cuando proponemos un conjunto **Γ** de axiomas para *T*(**O**), no incluimos en el conjunto a los axiomas lógicos, que se supone que ya han sido fijados de antemano. La demostración que haremos es válida tanto si esos axiomas lógicos son los mismos que ya establecimos en el capítulo 3, o si se elige cualquier otra presentación.

La demostración en sí consiste en ver que se cumplen las tres condiciones listadas en el corolario anterior.

Demostración de la condición 1. La relación SF(x, y): «x es el código de una sucesión finita de fórmulas en la que aparece la fórmula de código y» es expresable.

Sea **F** el conjunto de todas las fórmulas de *L*(**O**). Este conjunto es recursivo. Entonces, por la hipótesis del teorema 9.5, la relación «*x* es el código de una demostración a partir de *todas* las fórmulas e *y* es el código de una fórmula que aparece en esa demostración» es expresable. Pero como cualquier sucesión de fórmulas puede considerarse una demostración (si los axiomas son *todas* las fórmulas), esa relación equivale a SF(*x*, *y*): «*x* es una sucesión finita de fórmulas en la que aparece la fórmula *y*». Por lo tanto, SF(*x*, *y*) es expresable.

Demostración de la condición 2. Las operaciones que permiten hallar fórmulas sucesoras, tanto para fórmulas concatenables como para contadores, son todas expresables.

Observemos que «*y* es el código de una fórmula» equivale a «Existe una sucesión finita de fórmulas en la que aparece *y*».

La propiedad «*y* es el código de un axioma lógico» es también expresable porque equivale a «Existe una demostración en la que **Γ** es el conjunto vacío y en que la fórmula de código *y* es la única que aparece en la demostración».

Por otra parte, todo conjunto recursivo de fórmulas que no contenga axiomas lógicos es expresable. En efecto, sea **Γ** un conjunto recursivo de fórmulas que no contiene axiomas lógicos. La propiedad «*y* es el código de una fórmula de **Γ**» es expresable mediante la conjunción de:

- Existe *x*; que es el código de una demostración que toma como axiomas las fórmulas de **Γ**.
- *y* es el código de la única fórmula de *x*.
- *y* no es el código de un axioma lógico.

Queremos probar ahora que la función que transforma el código de una fórmula concatenable A en el código de la fórmula $A \to P_2$ es expresable.

Observemos que ni los contadores ni las fórmulas concatenables son fórmulas universalmente válidas. Por lo tanto, no importa qué presentación se elija para la

lógica de primer orden, no pueden ser axiomas lógicos. Por lo tanto, «Ser una fórmula concatenable» y «Ser un contador» son condiciones expresables.

Introduzcamos una quinta fórmula atómica S, distinta de P_1, P_2, R y Q, y consideremos el conjunto de todas las fórmulas del tipo C → S, donde C es una fórmula concatenable cualquiera. Es claro que este conjunto es recursivo y es fácil ver que no contiene axiomas lógicos (sus fórmulas no son universalmente válidas), por lo tanto es expresable.

Consideremos la relación F(x, y) definida por la conjunción de:

- x es el código de una fórmula concatenable.
- y es el código de una fórmula del tipo C → S, con C concatenable.
- Existe z, el código de una demostración que usa como axiomas a las fórmulas concatenables y a las del tipo C → S, tal que la demostración sólo contiene a la fórmula S, a la fórmula de código x, y a la fórmula de código y.

Si A es la fórmula de código x y B es la de código y, las condiciones anteriores implican que S se obtiene por *modus ponens* de A y B, es decir A = B → S o bien B = A → S. Por el modo en que están definidas las fórmulas sólo puede ser B = A → S.

Por lo tanto la función que transforma la fórmula A en la fórmula A → S es expresable.

Consideremos ahora la relación G(x, y) definida por la conjunción de:

- x es el código de una fórmula del tipo C → S, con C concatenable.
- y es el código de una fórmula concatenable.
- Existe z, el código de una demostración que usa como axiomas a las fórmulas del tipo C → S, con C concatenable y a las del tipo (D → P_1) → (D → S) con D concatenable, tal que la demostración sólo contiene a una fórmula del tipo (D → P_1) → (D → S), a la fórmula de código x, y a la fórmula de código y.

Sea A → S la fórmula de código x y B la fórmula concatenable de código y.

La tercera condición implica que A → S se obtiene por *modus ponens* de B y de una fórmula del tipo (D → P) → (D → S) con D concatenable. Esto sólo puede suceder si B = ((D → P_1) → (D → S)) → (A → S) o bien (D → P_1) → (D → S) = B → (A → S). Por el modo en que están definidas las fórmulas, la única opción posible es que D = A y B = A → P_1.

Por lo tanto, la función que transforma una fórmula del tipo A → S (con A concatenable) en la fórmula A → P_1 es expresable. Ya vimos que también es expresable la función que transforma A en A → S, concluimos entonces que la función que transforma A en A → P_1 es expresable.

De la misma manera se prueba que es expresable la función que transforma la fórmula A en la fórmula A → P_2 para A concatenable. Por lo tanto, las operaciones que permiten obtener las sucesoras de una fórmula concatenable son expresables.

Si A es un contador, se prueba del mismo modo que la función que transforma la fórmula A en la fórmula A → Q es expresable.

Demostración de la condición 3. La operación que, dada una fórmula concatenable A y un contador B, da como resultado la fórmula A → B, es expresable.

El conjunto de todas las fórmulas del tipo C → D, con C concatenable y D contador, es expresable porque es recursivo y no contiene axiomas lógicos (sus fórmulas no son universalmente válidas).

Sea H(*x*, *y*, *z*) definida por la conjunción de:

- *x* es el código de una fórmula concatenable.
- *y* es el código de un contador.
- *z* es el código de una fórmula del tipo C → D, con C concatenable y D contador.
- Existe *u*, el código de una demostración que toma como axiomas a las fórmulas concatenables y a las fórmulas del tipo C → D, en la que sólo aparecen *x*, *y*, *z*.

Si A es la fórmula concatenable de código *x* y B es el contador de código y entonces la tercera condición implica que B se obtiene por *modus ponens* de A y de la fórmula de código *z* que es del tipo C → D. Esto sólo es posible si la fórmula de código *z* es A → B. Por lo tanto, la función deseada es expresable.

Dado que se cumplen las tres condiciones indicadas en la observación, el teorema queda probado. ■

Atención: El teorema 9.5 afirma que si existe en **O** una codificación de Gödel tal que «Ser demostrable» es expresable, entonces existe en **O** una concatenación expresable. Esto no significa necesariamente que esa codificación en particular estaba definida a partir de una concatenación.

El verdadero significado es que si «Ser demostrable» es expresable en **O**, entonces existe en **O** una concatenación expresable, y a partir de ella puede definirse

una *nueva* codificación que permite a su vez desarrollar la demostración del teorema 9.1.

Una consecuencia del teorema 9.5: La hipótesis que hemos resumido con la frase:

«Ser demostrable» es expresable

es común a dos argumentos diferentes que prueban, para la aritmética, el Teorema de Incompletitud.

El primer argumento es el que dimos en el capítulo 5. Después de probar que «Ser demostrable» es expresable, el argumento prosigue con la prueba de que la función diagonal es expresable. Como hemos explicado en el capítulo 1, este argumento está basado en la paradoja del mentiroso y da lugar a un enunciado que dice «Yo no soy demostrable».

El segundo argumento está basado en la paradoja de Berry y se debe, de manera independiente, a Xavier Caicedo [Caicedo] y a George Boolos [Boolos], inspirado en una idea similar de Gregory Chaitin.

La paradoja de Berry aparece al plantear una definición que es contradictoria en sí misma:

Sea *n* el menor número que no se puede definir con una oración de menos de cien palabras.

El número *n*, que no se puede definir con menos de cien palabras, queda definido por la oración anterior que, sin embargo, tiene menos de cien palabras.

El argumento de Caicedo y Boolos emplea entonces los conceptos de *longitud* de una fórmula (en el sentido de *cantidad de símbolos*) y de definibilidad (en el sentido de si una fórmula define, o no define, a un cierto elemento).

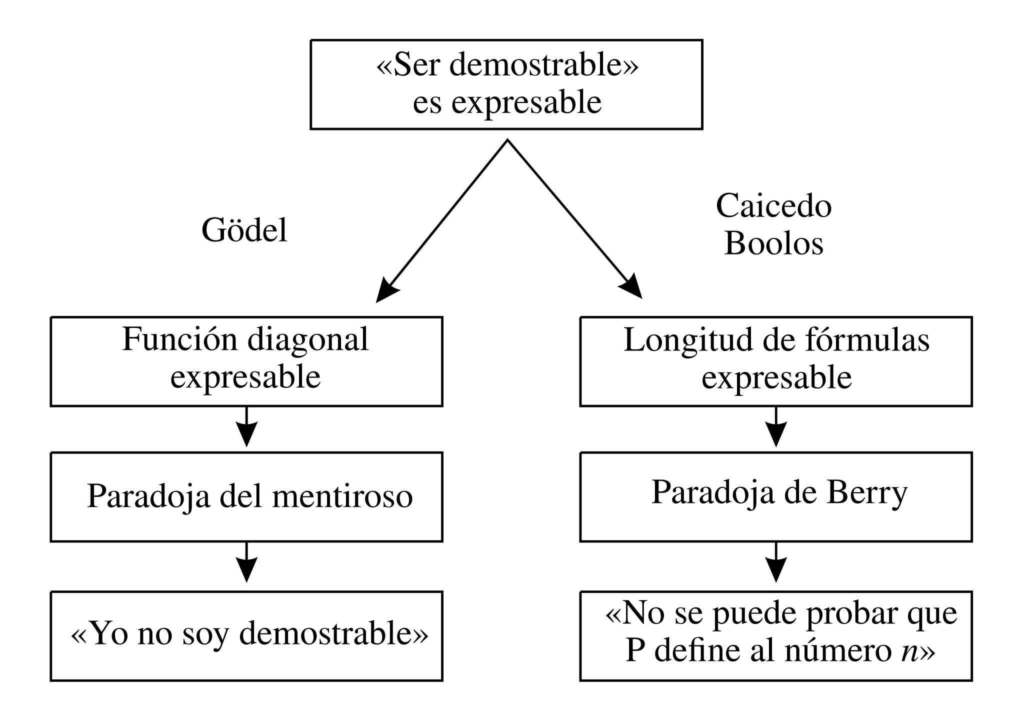
La prueba consiste en exhibir una fórmula P(x) tal que:

- P(x) es de longitud menor que un cierto número M.
- P(x) define a un número *n*.
- No se puede demostrar que *n* es definible por una fórmula de longitud menor que M.

Los dos primeros puntos dicen que:

«El número *n* es definible por una fórmula de longitud menor que M»

y el tercero dice que ésa es una verdad no demostrable.



Así como sucede con el argumento de la paradoja del mentiroso, el argumento de la paradoja de Berry también puede extenderse a otros objetos matemáticos.

La pregunta que podemos plantearnos es:

> ¿Existirá algún objeto matemático **O** en el que uno de los dos argumentos sea aplicable, pero no el otro?

Probaremos que la respuesta es no. Ambos argumentos, aunque se basan en ideas diferentes, pueden extenderse exactamente a la misma familia de objetos matemáticos.

> **Corolario:** Tanto la prueba del Teorema de Gödel basada en la paradoja del mentiroso como la prueba basada en la paradoja de Berry pueden extenderse a un objeto matemático **O** (numerable) si y sólo si existe una concatenación expresable en **O** con al menos dos átomos definibles.

Demostración: Ya probamos en el teorema 9.1 que si en un objeto matemático **O** existe una concatenación expresable (con al menos dos átomos definibles) entonces el argumento de la paradoja del mentiroso puede emplearse para demostrar que *T*(**O**) no es recursivamente axiomatizable.

Para que sea aplicable el argumento de la paradoja de Berry, debemos primero extender la noción de *longitud* de tal modo que pueda ser definida en términos de elementos de **O**.

Sea $\circ$ la operación de concatenación en **O**. A partir de esta operación, tal como hicimos en la demostración del teorema 9.1, definimos una codificación de Gödel para **O**.

Si a es uno de los átomos definibles, llamemos NAT (la nomenclatura es de [Wasserman]) al conjunto formado por los elementos que se obtienen al concatenar n veces el átomo a consigo mismo. Por ejemplo:

$$a$$
$$a \circ a$$
$$a \circ a \circ a$$

Si identificamos al elemento a con el número 1, al elemento $a \circ a$ con el número 2 y así sucesivamente, entonces el conjunto NAT es equivalente a {1, 2, 3,…}.

Podemos entonces definir la longitud de una fórmula en términos de elementos del universo de **O**:

Si la fórmula P tiene un símbolo, su longitud se define como a.

Si la fórmula P tiene dos símbolos, su longitud se define como $a \circ a$.

Y así sucesivamente.

No es difícil probar que, dado que la operación $\circ$ es expresable en **O**, entonces la función «Longitud de una fórmula» es expresable. (Es decir, es expresable la función que al código de una fórmula le asigna el elemento de NAT que corresponde a la longitud de ésta).

Sabemos además, por lo demostrado en el capítulo anterior, que toda propiedad recursiva es expresable en **O**. En consecuencia, el argumento de la paradoja de Berry es aplicable a **O**.

Recíprocamente, tanto el argumento de la paradoja del mentiroso como el de la paradoja de Berry se basan en la hipótesis de que *«Ser demostrable» es expresable*. Por el teorema 9.5, existe entonces una concatenación expresable en **O** (con al menos dos átomos definibles). ■

§ 3. Conclusiones y preguntas abiertas

Desde el capítulo 5 en adelante, cuatro afirmaciones acerca de **N** han estado, una y otra vez, presentes en nuestros argumentos:

1. Existe una concatenación expresable en **N**.
2. Toda propiedad recursiva es expresable en **N**.
3. Hay una codificación de Gödel tal que «Ser demostrable» es expresable en **N**.

4. $T(\mathbf{N})$ no es recursivamente axiomatizable.

Una manera (aunque para nada la única) de llevar el Teorema de Gödel a contextos más generales es considerar, en lugar de **N**, un objeto matemático **O** (numerable) cualquiera.

Con ese fin, en este capítulo extendimos a un objeto **O** cualquiera las definiciones de *verdad*, de *operación de concatenación* y de *codificación de Gödel* que dimos para **N**.

Gracias a estas extensiones tiene sentido plantear las mismas cuatro afirmaciones para un objeto matemático **O** arbitrario:

1. Existe una concatenación expresable en **O**.
2. Toda propiedad recursiva es expresable en **O**.
3. Hay una codificación de Gödel tal que «Ser demostrable» es expresable en **O**.
4. $T(\mathbf{O})$ no es recursivamente axiomatizable.

¿Qué dependencia lógica existe entre ellas?

- El teorema 9.1 muestra que si existe una concatenación expresable en **O** y además los átomos son definibles, entonces se deducen las otras tres afirmaciones.
- Si los átomos no son definibles, aunque todavía se deduce que $T(\mathbf{O})$ no es recursivamente axiomatizable, el ejemplo de $\mathbf{O} = (\{a, b\}^{+}; \circ)$ muestra que ya no se pueden deducir las otras dos afirmaciones.
- Si toda propiedad recursiva es expresable en **O** entonces valen las otras tres condiciones (esto se demuestra en el capítulo 5).
- Hemos probado en este capítulo que si hay una codificación de Gödel tal que «Ser demostrable» es expresable en **O** entonces existe una concatenación expresable en **O** (con átomos definibles).

Una pregunta permanece abierta: *¿Es cierto que si T(**O**) no es recursivamente axiomatizable entonces siempre existe en **O** una concatenación expresable (tal vez sin átomos definibles)?*

Como ya dijimos, conjeturamos que la respuesta es no. Nuestra conjetura se basa, en parte, en el siguiente ejemplo. Sea g una codificación de Gödel recursiva para los enunciados de la aritmética y llamemos $\mathrm{V}(x)$ a la propiedad «x es el código de un enunciado verdadero». A partir del teorema de Tarski, probado en el capítulo 5, no es

difícil demostrar que la teoría del objeto **O** = (N; V(x), {0, 1, 2,…}) no es recursivamente axiomatizable. Nuestra conjetura es que, sin embargo, no existe en **O** una concatenación expresable. No hemos encontrado todavía una demostración convincente de este hecho, que nos permitiría exhibir un ejemplo de un objeto **O** tal que T(**O**) no recursivamente axiomatizable sin que exista en el universo de **O** una concatenación expresable.

Otra pregunta, que no fue tratada directamente aquí, pero que se relaciona con todas las cuestiones que hemos estudiado es: ¿Qué condiciones *intrínsecas* de **O** (es decir, condiciones «algebraicas» sobre las operaciones y relaciones de **O**, no sobre su lenguaje) garantizan que T(**O**) no es recursivamente axiomatizable?

Podríamos preguntarnos, por ejemplo, qué características deben tener las funciones y relaciones de **O** para que valgan las hipótesis del teorema 9.4 o las tres condiciones que permitieron demostrar el teorema 9.5.

¿Existirán condiciones intrínsecas (o «algebraicas») sobre **O** que sean equivalentes al hecho de que T(**O**) no es recursivamente axiomatizable? La existencia de una concatenación expresable se acerca a una condición intrínseca de este tipo ¿es posible refinar todavía esta condición? El problema permanece abierto.

§ 4. Ejercicios

Ejercicio 9.1: Demostrar el siguiente teorema y deducir como corolario que la propiedad $x = a$ no es expresable en **O** = ($\{a, b\}^+$; ∘).

> **Teorema 9.2:** Sea el objeto **O** = ($\{a, b\}^+$;∘), donde $\{a, b\}^+$ es el conjunto de todas las palabras formadas por las letras a y b, y ∘ es la concatenación usual de palabras. Entonces T(**O**) no es recursivamente axiomatizable.

Demostración: Consideremos el objeto **O'** = ($\{a, b\}^+$; ∘, a, b), que sólo difiere de **O** en que a su lenguaje se le agregan las constantes a y b. Por el teorema 9.1 T(**O'**) no es recursivamente axiomatizable.

Si Q es un enunciado de L(**O'**) llamemos al enunciado que se obtiene al reemplazar cada aparición (si hubiera alguna) de la constante a por la constante b, y viceversa. Si Q, en particular, fuera un enunciado de L(**O**) (es decir, si en Q no aparecen ni la constante a ni la constante b) entonces, evidentemente, Q_{ab} = Q.

No es difícil probar que:

Q es verdadero en **O'** si y sólo si Q_{ab} es verdadero en **O'**

Intuitivamente, la afirmación es evidente: dice que si una cierta propiedad referida a la concatenación es verdadera entonces sigue siendo verdadera si se cambia el

nombre de los átomos.

Omitiremos aquí la demostración rigurosa de la afirmación, que se efectúa ascendiendo por el grado de complejidad de los enunciados. La propiedad se demuestra primero para los enunciados atómicos y luego se ve que se conserva cuando se aplican las operaciones lógicas que llevan de los enunciados atómicos a otros más complejos.

Como vimos en el capítulo 3, todo lenguaje de primer orden tiene variables que pueden numerarse como $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$

Si Q es un enunciado de L(**O'**), sean u y v las dos primeras variables (según la numeración anterior) que no aparecen en Q. Llamamos entonces $Q^{u,v}$ a la fórmula que se obtiene reemplazando cada aparición de a (si hubiera alguna) por la variable u y cada aparición de b por la variable v. Como en $Q^{u,v}$ no hay constantes, entonces es una fórmula en L(**O**).

Es fácil ver que si Q, en particular, es un enunciado, entonces las únicas variables que pueden aparecer libres en $Q^{u,v}$ son u y v.

Sea ATOM(x) la fórmula $\neg\exists y \exists z(x = z \circ y)$. Es claro que ATOM($x$) expresa el conjunto $\{a, b\}$.

Si Q es un enunciado de L(**O'**), llamamos d(Q) al enunciado:

$$\exists u \exists v(u \neq v \bigwedge \text{ATOM}(u) \bigwedge \text{ATOM}(v) \bigwedge Q^{u,v}) \rightarrow (Q \bigwedge Q_{ab})$$

No es difícil ver que:

- Cualquiera que sea Q de **L**(**O'**), el enunciado d(Q) es siempre verdadero.

Intuitivamente, esta afirmación dice que si $Q^{u,v}$ es una fórmula que es verdadera en la que u y v representan átomos de la concatenación, entonces sigue siendo verdadera cuando u y v son reemplazadas por los nombres de esos átomos (ya sea que u sea reemplazada por a y v por b, o viceversa).

- El enunciado Q es verdadero en **O'** si y sólo si $\exists u \exists v(u \neq v \bigwedge \text{ATOM}(u) \bigwedge \text{ATOM}(v) \bigwedge Q^{u,v})$ es verdadero en **O**.

Intuitivamente, dice que si Q es verdadero entonces sigue siendo verdadero si se reemplazan los nombres de los átomos por variables que representen átomos.

Estamos ya en condiciones de probar que T(**O**) no es recursivamente axiomatizable. Supongamos, por el absurdo, que sí lo fuera y sea Γ un conjunto recursivo de axiomas para T(**O**).

Llamemos Δ al conjunto que se obtiene al agregar a Γ todos los enunciados de la forma d(Q), donde Q es un enunciado cualquiera de **O'**. Es fácil ver que Δ es un

conjunto recursivo. Probemos que todo enunciado de $L(\mathbf{O'})$ que es verdadero en **O'** es demostrable a partir de Δ.

Si Q es un enunciado verdadero en **O'** entonces:

$$\exists u \exists v(u \neq v \bigwedge \mathrm{ATOM}(u) \bigwedge \mathrm{ATOM}(v) \bigwedge \mathrm{Q}^{u,v})$$

es verdadero en **O** y por lo tanto es demostrable a partir de Γ. Como todos los axiomas de Γ están también en Δ, entonces $\exists u \exists v(u \neq v \bigwedge \mathrm{ATOM}(u) \bigwedge \mathrm{ATOM}(v) \bigwedge \mathrm{Q}^{u,v})$ es demostrable a partir de Δ.

Además:

$$\exists u \exists v(u \neq v \bigwedge \mathrm{ATOM}(u) \bigwedge \mathrm{ATOM}(v) \bigwedge \mathrm{Q}^{u,v}) \rightarrow (\mathrm{Q} \bigwedge \mathrm{Q}_{ab})$$

es un axioma, porque está en Δ. Luego $\mathrm{Q} \bigwedge \mathrm{Q}_{ab}$ es demostrable y en consecuencia Q es demostrable.

Vemos así que si **O** es recursivamente axiomatizable entonces **O'** es también recursivamente axiomatizable, pero esto es un absurdo porque existe una concatenación expresable en **O'** con dos átomos definibles. Luego **O** no es recursivamente axiomatizable, como queríamos probar. ■

Corolario: La propiedad $x = a$ no es expresable en $\mathbf{O} = (\{a, b\}^+;\circ)$.

Demostración: Razonemos por el absurdo. Si la propiedad fuera expresable, existiría una fórmula $\mathrm{P}(x)$ de $L(\mathbf{O})$ tal que el enunciado $\mathrm{Q} = \mathrm{P}(a)$ es verdadero en $\mathbf{O'} = (\{a, b\}^+; \circ, a, b)$ y $\mathrm{Q}_{ab} = \mathrm{P}(b)$ es falso en **O'** (adoptamos aquí las notaciones de la demostración del teorema 9.2). Pero esto es absurdo, ya que contradice lo afirmado en esa misma demostración: que Q es verdadero si y sólo si Q_{ab} es verdadero.

Ejercicio 9.2: Completar la demostración del siguiente teorema.

Teorema 9.4: Sea **O** un objeto con una codificación de Gödel tal que:

1. $\mathrm{SF}(x, y)$: «x es el código de una sucesión finita de fórmulas en la que aparece la fórmula de código y», es expresable.
2. La función $\mathrm{Imp}(x, y)$ que a los códigos de las fórmulas P y Q le asigna el código de la fórmula $\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$ es expresable.

Bajo estas condiciones, existe en **O** una concatenación expresable con dos átomos definibles.

Demostración: La concatenación estará definida para los códigos de las fórmulas del tipo $(\ldots(((\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{P}_{r_1}) \rightarrow \mathrm{P}_{r_2}) \rightarrow \mathrm{P}_{r_3}) \rightarrow \ldots) \rightarrow \mathrm{P}_{r_n}$ con $r_k = 1$ o $r_k = 2$, a las que

llamamos *fórmulas concatenables*.

La operación de concatenación se define como:

$$g((\ldots((R \to P_{r_1}) \to P_{r_2}) \to \ldots) \to P_{r_n}) \circ g((\ldots((R \to P_{s_1}) \to P_{s_2}) \to \ldots \to P_{s_m})$$

$$=$$

$$g((\ldots((((R \to P_{r_1}) \to P_{r_2}) \to \ldots) \to P_{r_n}) \to P_{s_1}) \to P_{s_2}) \to \ldots \to P_{s_m})$$

Cada fórmula concatenable

$$(\ldots(((R \to P_{r_1}) \to P_{r_2}) \to P_{r_3}) \to \ldots) \to P_{r_{n-1}}) \to P_{r_n} \text{ con } r_k = 1 \text{ o } r_k = 2$$

tiene dos *fórmulas sucesoras*, que se obtienen al agregar, a la derecha de la original, la fórmula atómica P_1, o la fórmula atómica P_2:

$$(\ldots(((R \to P_{r_1}) \to P_{r_2}) \to P_{r_3}) \to \ldots) \to P_{r_{n-1}}) \to P_{r_n} \to P_1$$

$$(\ldots(((R \to P_{r_1}) \to P_{r_2}) \to P_{r_3}) \to \ldots) \to P_{r_{n-1}}) \to P_{r_n} \to P_2$$

y una *fórmula antecesora*, que se obtiene al quitar la fórmula P del extremo derecho:

$$(\ldots(((R \to P_{r_1}) \to P_{r_2}) \to P_{r_3}) \to \ldots) \to P_{r_{n-1}}$$

Hay que probar que «Ser una fórmula concatenable» y la operación de concatenación son expresables.

Comencemos por definir tres condiciones sobre una sucesión finita de fórmulas que aseguran que todas ellas son concatenables. Estas condiciones son:

- O bien la fórmula $R \to P_1$ está en la sucesión, o bien la fórmula $R \to P_2$ está en la sucesión.
- Si la fórmula C está en la sucesión entonces existe A tal que $C = A \to P_1$ o bien $C = A \to P_2$.
- Si la fórmula C está en la sucesión y existe A tal que $C = A \to P_1$ o $C = A \to P_2$, con $A \neq R$ entonces A está también en la sucesión.

Las tres condiciones son expresables, por lo que:

«x es el código de una sucesión finita que sólo contiene fórmulas concatenables»

es expresable. Llamemos $SC(x)$ a la fórmula que expresa esa condición. Luego «Ser una fórmula concatenable» se expresa como:

$$\exists x(SC(x) \bigwedge SF(x, y))$$

Falta probar que la operación de concatenación es expresable. Diremos que una sucesión finita de fórmulas *va desde F hasta G* si:

- Tanto F como G son concatenables.
- G se obtiene de F por aplicaciones sucesivas de las operaciones que generan fórmulas sucesoras.
- La sucesión contiene a la fórmula F, a la fórmula G, a todas las fórmulas intermedias entre F y G, pero ninguna otra fórmula además de éstas.

Estas tres condiciones equivalen a las siguientes:

- Todas las fórmulas de la sucesión son concatenables.
- La fórmula F y la fórmula G están en la sucesión.
- Para cada fórmula de la sucesión que no sea F, su antecesora está también en la sucesión. Es decir, si H está en la sucesión y $H = A \to P_1$ (o bien $H = A \to P_2$) y $H \neq F$ entonces A está también en la sucesión.
- En la sucesión no hay fórmulas sucesoras de G. Es decir, ni $G \to P_1$, ni $G \to P_2$ están en la sucesión.
- En la sucesión no está la antecesora de F (si es que existe). Es decir, si $F = B \to P_1$ (o bien $F = B \to P_2$) entonces B no está en la sucesión.

Nótese que, fijadas F y G, estas condiciones no caracterizan una única sucesión, pero si dos sucesiones cumplen estas condiciones entonces contienen exactamente las mismas fórmulas y sólo difieren en el orden en que están escritas o en la cantidad de veces en que eventualmente aparezcan repetidas.

Por otra parte, llamaremos *contadores* al conjunto de las fórmulas del tipo:

$$(\ldots(((R \to Q) \to Q) \to Q) \to \ldots) \to Q$$

«Ser un contador» también es expresable y esto se prueba de la misma forma que para las fórmulas concatenables. (Nótese que cada contador tiene una fórmula sucesora y, excepto el contador $R \to Q$, tiene también una fórmula antecesora).

Supongamos que **S** es una sucesión finita de fórmulas que lleva desde F hasta G. Los contadores nos servirán para contar la cantidad de fórmulas diferentes que hay en la sucesión. Procedemos así:

Transformamos la fórmula F en la fórmula $F \to (R \to Q)$.

Si F' es una sucesora de F, la transformamos en $F' \to (R \to Q) \to Q$.

Y así sucesivamente.

Con más precisión, llamaremos *sucesión derivada de* **S**, a cualquier sucesión que se obtenga al agregar a cada fórmula de **S** estos contadores (y que es única, salvo repeticiones o el orden en que las fórmulas se escriban).

Por ejemplo, si **S** está formada por:

$$(R \to P_1) \to P_1$$

$$((R \to P_1) \to P_1) \to P_2$$

$$(((R \to P_1) \to P_1) \to P_2) \to P_1$$

Entonces una sucesión derivada de **S** está formada por:

$$(R \to P_1) \to P_1) \to (R \to Q)$$

$$(((R \to P_1) \to P_1) \to P_2) \to ((R \to Q) \to Q)$$

$$((((R \to P_1) \to P_1) \to P_2) \to P_1) \to (((R \to Q) \to Q) \to Q)$$

(Cualquier otra sucesión derivada contiene esas mismas tres fórmulas, tal vez en otro orden o tal vez con repeticiones).

Una sucesión derivada de **S**, que llamaremos **S'**, queda caracterizada (salvo orden y repeticiones) por estas condiciones:

- Toda fórmula de **S'** es de la forma $A \to B$, donde A es una fórmula de **S** y B es un contador.
- $F \to (R \to Q)$ está en **S'** y, excepto ésta, no hay en **S'** otra fórmula del tipo $A \to (R \to Q)$ o del tipo $F \to B$. (Es decir, el contador $R \to Q$ le corresponde a la fórmula F y a ninguna otra).
- Si la fórmula $(A \to P_1) \to (B \to Q)$, respectivamente la fórmula $(A \to P_2) \to (B \to Q)$, está en **S'** y $(A \to P_1) \neq F$, respectivamente $(A \to P_2) \neq F$ entonces $A \to B$ está en **S'**.

Todas estas condiciones son expresables, por lo que es claro que «Ser una sucesión derivada de **S**» es expresable.

Observemos que si una sucesión lleva desde alguna F hasta alguna G, no importa cuáles sean F y G, entonces la sucesión tiene *n* fórmulas diferentes si y sólo si en su derivada aparece la fórmula $G \to (\dots (R \to Q) \to \dots \to Q)$, con *n* veces la fórmula Q. Es decir, los contadores nos sirven para comparar las cantidades de elementos diferentes en las sucesiones.

Con más precisión, si $\mathbf{S_1}$ es una sucesión que lleva de F_1 hasta G_1 y $\mathbf{S_2}$ es una sucesión que lleva de F_2 hasta G_2, ambas sucesiones tienen la misma cantidad de

fórmulas diferentes si y sólo si existe una fórmula $B \in W$ tal que $G \to B$ está en $\mathbf{S'_1}$ y $G \to B$ está en $\mathbf{S'_2}$. La relación «Tienen la misma cantidad de fórmulas diferentes» es expresable.

Estamos ya en condiciones de definir la concatenación. Si la fórmula F y la fórmula G están en **V**, entonces $g(F) \circ g(G)$ se define como el único $g(H)$ tal que H verifica:

> Si $\mathbf{S_1}$ es una sucesión que lleva de $R \to P_1$ o de $R \to P_2$ hasta G entonces existe una sucesión $\mathbf{S_2}$ que lleva de F hasta H tal que:
>
> - $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$ tienen la misma cantidad de fórmulas diferentes.
> - Si $A \to C \in \mathbf{S'_1}$ y $B \to C \in \mathbf{S'_2}$, y si $(A \to P_1) \to (C \to Q) \in \mathbf{S_1}$ entonces $(B \to P_1) \to (C \to Q) \in \mathbf{S'_2}$ y si $(A \to P_2) \to (C \to Q) \in \mathbf{S'_1}$ entonces $(B \to P_2) \to (C \to Q) \in \mathbf{S'_2}$.

La sucesión $\mathbf{S_1}$ contiene la información de los átomos que forman G y la sucesión $\mathbf{S_2}$ los copia a la derecha de la fórmula F. La última condición asegura que los átomos sean copiados en el orden correcto. Todas las condiciones son expresables en el lenguaje de **O**.

Finalmente, observemos que los átomos de la concatenación son $g(R \to P_1)$ y $g(R \to P_2)$, que son códigos de fórmulas y en consecuencia, por la definición de codificación de Gödel, son definibles. ■

APÉNDICES

APÉNDICE I

EJEMPLOS DE TEORÍAS COMPLETAS E INCOMPLETAS

1. Los axiomas de Euclides para la geometría

Damos aquí uno de los ejemplos históricos más importantes de una teoría dada por axiomas, que fue considerado modélico en la historia de la matemática. En la formulación original, Euclides ya hacía la distinción entre afirmaciones de naturaleza matemática específica (los postulados) y afirmaciones de naturaleza lógica general (nociones comunes).

Postulados

1. (Es posible) trazar una línea recta desde cualquier punto a cualquier otro.
2. (Es posible) prolongar continuamente en línea recta una recta dada.
3. (Es posible) trazar un círculo con cualquier centro y distancia (radio).
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una recta incide sobre otras dos formando del mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, al prolongarlas indefinidamente se encontrarán por el lado en que los ángulos sean menores que dos rectos.

Nociones comunes

1. Cosas que son iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.
2. Si a cosas iguales se suman cosas iguales, los totales son iguales.
3. Si a cosas iguales se restan cosas iguales, los restos son iguales.
4. Cosas que encajen cada una en la otra son iguales entre sí.
5. El todo es mayor que la parte.

Observaciones:

1. El postulado 5 puede ser reformulado como

    5*. Dado una línea recta y un punto exterior a ella puede trazarse una única línea paralela a la recta dada que pase por ese punto.

    En su tratado de geometría Euclides eludió hasta donde le era posible usar este quinto postulado, porque no le parecía tan obvio como los anteriores. Durante siglos los geómetras trataron de probar el quinto postulado como un teorema a partir de los cuatro primeros. Finalmente, a principios del siglo XIX, C. F. Gauss, J. Bolyai y N. Lobachevski, independientemente unos de otros, conjeturaron que el quinto axioma no era demostrable a partir de los otros cuatro. Esto dio lugar a una geometría alternativa a la euclideana, llamada hiperbólica, en que valen los primeros cuatro postulados y la negación del quinto.

    Finalmente la consistencia de la geometría hiperbólica fue probada por Eugenio Beltrami (1835-1900). En 1868 escribió un artículo titulado «Ensayo sobre la interpretación de la geometría no euclidiana» en el que presentaba un modelo para la geometría hiperbólica dentro de la geometría euclidiana. Esto significa que si la geometría hiperbólica fuera inconsistente, esa inconsistencia no provendría de la negación del quinto axioma, sino de alguno de los cuatro axiomas que dan fundamento también a la geometría euclidiana.

2. Ya Euclides era consciente de la separación entre los postulados que se referían a los objetos matemáticos (los primeros 5) y las nociones puramente lógicas, «universalmente válidas», que reúne como «nociones comunes».

AXIOMATIZACIONES DE UN OBJETO MATEMÁTICO

Dado un objeto matemático **O**, llamamos *Teoría de* **O**, y escribimos *T*(**O**), al conjunto de enunciados (de primer orden) verdaderos en **O**.

Éste es un ejemplo siempre disponible (y trivial) de una axiomatización completa para el objeto **O**: incluir como axiomas a *todos* los enunciados verdaderos. Pero la idea detrás de una axiomatización es poder presentar fehacientemente unos «pocos» enunciados verdaderos, que sean a la vez suficientes o «bastantes» para reobtener, como teoremas, a todos los enunciados verdaderos de **O**.

Una teoría *T* se dice *recursivamente axiomatizable* si existe una teoría *T'* recursiva tal que los teoremas de *T'* son los mismos que los de *T*.

Una teoría *T* se dice *finitamente axiomatizable* si existe una teoría *T'* con una cantidad finita de axiomas tal que los teoremas de *T'* son los mismos que los de *T*.

En la discusión de los ejemplos que siguen nos serán útiles también estas definiciones:

Una teoría T' *extiende* a la teoría T si todo axioma de T es también axioma de T'.

Una teoría T se dice *finitamente completable* si puede extenderse a una teoría T' completa por el agregado de una cantidad finita de axiomas.

Una teoría T se dice *recursivamente completable* si puede extenderse a una teoría T' completa por el agregado de un conjunto recursivo de axiomas.

Una teoría se dice *esencialmente incompleta* si es incompleta y recursivamente incompletable.

EJEMPLOS DE AXIOMATIZACIONES FINITAS O RECURSIVAS

2. La teoría de los números fraccionarios con el orden habitual (Q; <)

El lenguaje es $L = \{<\}$. Consideremos los siguientes enunciados, que se verifican todos en **Q** (omitimos, por brevedad, los cuantificadores universales):

(1) $\neg(x < x)$ (Prop. reflexiva)

(2) $x < y \rightarrow \neg(y < x)$ (Prop. antisimétrica)

(3) $(x < y \bigwedge y < z) \rightarrow x < z$ (Prop. transitiva)

(4) $x \neq y \rightarrow (x < y \bigvee y < x)$ (Orden total)

(5) $x < y \rightarrow \exists z(x < z \bigwedge z < y)$ (Densidad)

(6) $\exists y(x < y)$ (No hay extremo superior)

(7) $\exists y(y < x)$ (No hay extremo inferior)

Ésta es una lista finita y completa de axiomas para los números fraccionarios **Q** con el orden habitual. Es decir, todos los enunciados (de primer orden) que se escriben con estos símbolos y son verdaderos en **Q** pueden reobtenerse como teoremas a partir de estos 7 axiomas [Chang y Keisler].

3. La teoría de los números fraccionarios con la suma

Sea $L = \{+, 0\}$, donde + es símbolo de función binaria y 0 símbolo de constante. Consideremos los siguientes axiomas, que se verifican todos en (**Q**; +, 0):

(1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Asociatividad)

(2) $x + 0 = x \wedge 0 + x = x$ (Existencia de elemento neutro)

(3) $\exists y(x + y = 0 \wedge y + x = 0)$ (Todo elemento tiene inverso)

(4) $x + y = y + x$ (Conmutatividad)

(5_n) $x \neq 0 \rightarrow nx \neq 0$ (Una lista infinita de axiomas, donde $2x$ es $x + x$, $3x$ es $x + x + x$, etc.)

(6_n) $\exists y(ny = x)$ (Divisibilidad, dada por una lista infinita de axiomas, uno para cada n)

Esta teoría es recursiva y completa, pero no finitamente axiomatizable [Chang y Keisler].

4. La teoría de primer orden de los números complejos

Recordemos que los *números complejos* pueden pensarse como expresiones del tipo $a + bi$, donde a y b son números reales, e i es la componente imaginaria con la propiedad $i^2 = -1$.

La suma de dos números complejos está dada del siguiente modo: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

La multiplicación de dos números complejos está dada del siguiente modo: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Sea L = {+, ·, 0, 1} donde + y · son símbolos de funciones binarias y 0 y 1 símbolos de constantes. Consideremos la siguiente lista de enunciados (que se verifican todos en ℂ, el conjunto de los números complejos):

(1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Asociatividad)

(2) $x + 0 = x \wedge 0 + x = x$ (Existencia de elemento neutro)

(3) $\exists y(x + y = 0 \wedge y + x = 0)$ (Todo elemento tiene inverso)

(4) $x + y = y + x$ (Conmutatividad)

(1 es una unidad para el producto)

(5) $1 \cdot x = x \bigwedge x \cdot 1 = x$

(6) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (Asociatividad de ·)

(7) $x \cdot y = y \cdot x$ (Conmutatividad de ·)

(8) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ (Distributividad de · sobre +)

(9) $x \cdot y = 0 \rightarrow x = 0 \bigvee y = 0$ (No hay divisores de 0)

(10) $0 \neq 1$

(11) $x \neq 0 \rightarrow \exists y(y \cdot x = 1)$

(12_n) $n1 \neq 0$ (una lista infinita de axiomas)

(13_n) $\exists y(x_n \cdot y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \ldots + x_1 \cdot y + x_0 = 0) \bigvee x_n = 0$

El último axioma (en realidad una lista infinita de axiomas) expresa el hecho de que todo polinomio tiene alguna raíz.

Ésta es una axiomatización recursiva y completa para los números complejos [Chang y Keisler].

Sabemos que los números naturales son un subconjunto de los números complejos y pueden obtenerse como 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, etcétera. Más aún, las operaciones de suma y multiplicación que definimos más arriba, restringidas a este subconjunto, coinciden con la suma y el producto habitual de números naturales. ¿Contradice acaso esto lo que habíamos dicho sobre la extensión del Teorema de Gödel y el fenómeno de incompletitud a los sistemas donde pudieran definirse los números naturales con las operaciones de suma y producto?

En realidad no. Como explicamos en el capítulo 3, si bien los números naturales están allí, no puede definirse (con enunciados de primer orden) la propiedad «Ser natural», la pertenencia al conjunto de todas estas expresiones 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1,… Si esto pudiera hacerse, de acuerdo al Teorema de Incompletitud de Gödel, la teoría sería incompleta.

5. La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel

La teoría se formula en la lógica de primer orden con identidad y tiene un símbolo de relación binario ∈. Los axiomas son los siguientes:

(1) $\forall xy(x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y))$

(Extensionalidad) Intuitivamente, los conjuntos x e y son iguales si y sólo si x e y tienen los mismos elementos.

(2) $\exists x \forall y (\neg y \in x)$

(Conjunto vacío) Intuitivamente, existe un conjunto sin elementos. Puede probarse que es único con esta propiedad y se lo denota $\varnothing$.

(3) $\forall xy \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \bigvee u = y)$

(Pares) Intuitivamente, si x e y son conjuntos, también es un conjunto $\{x, y\}$.

(4) $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists w (z \in w \bigwedge w \in x))$

(Uniones) Intuitivamente, si x es un conjunto, entonces también es un conjunto $\bigcup x$.

(5) $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \forall w (w \in z \rightarrow w \in x))$

(Conjunto de las partes) Intuitivamente, si x es un conjunto, también es un conjunto el que tiene por elementos a todos los subconjuntos de x.

(6) $\exists x (\exists y (y \in x) \bigwedge \forall y (y \in x \rightarrow \exists z (y \in z \bigwedge z \in x)))$

(Infinito) Intuitivamente, existen conjuntos infinitos. En particular, consideremos los siguientes conjuntos:

— $\varnothing$, que llamamos «0»

— $\{\varnothing\}$, un conjunto con un solo elemento, que llamamos «1»

— $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, un conjunto con dos elementos, que llamamos «2»

— $\{0, 1, 2\}$, un conjunto con tres elementos, que llamamos «3»

— $\{0, 1, 2, 3\}$, que llamamos «4»

etcétera.

El conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4,\ldots\}$ satisface la condición del axioma: es no vacío, y para cada elemento n del conjunto, hay otro $(n + 1)$, tal que $n + 1$ pertenece al conjunto y n pertenece a $n + 1$.

Este axioma postula la existencia de un conjunto infinito actual, dado «todo a la vez».

(7) $\forall x (\exists y (y \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \bigwedge \neg \exists z (z \in y \bigwedge z \in x)))$

(Regularidad) Intuitivamente, todo conjunto no vacío es disjunto de alguno de sus elementos.

(8) $\forall x \exists ! z\, \varphi(x, z, u, v_1 \ldots v_n) \rightarrow \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow \exists x (x \in u \bigwedge \varphi(x, z, u, v_1 \ldots v_n))]$

(Reemplazo) donde φ es una fórmula en la que la variable y no ocurre y $\exists ! z$ significa «hay un único z». Intuitivamente, si $F(x)$ es el único z tal que satisface $\varphi(x, z\ldots)$, entonces $\{F(x) : x \in u\}$ es un conjunto.

En la teoría de Zermelo-Fraenkel, gracias al axioma (6) de infinito, puede probarse la consistencia de la aritmética. Los números naturales se obtienen como

$$0 = \varnothing$$
$$1 = \{\varnothing\}$$
$$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$
$$3 = \{0, 1, 2\}$$
$$4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

etcétera.

La llamada «aritmética de conjuntos» es la teoría que tiene todos los axiomas de ZF salvo el de infinito, que es reemplazado por su negación. Esta teoría es equivalente a la aritmética de Peano (y no podría probarse en ella la consistencia de la aritmética).

La diferencia crucial es el axioma (6) que postula un conjunto infinito actual. Si bien la teoría ZF permite probar la consistencia de la aritmética, no podría (otra vez

por el Teorema de Gödel) probar su propia consistencia. Los axiomas de Zermelo-Fraenkel evitan las inconsistencias más obvias que aparecían en la teoría intuitiva de conjuntos (por ejemplo, la paradoja de Russell). Cuando se le agrega el llamado «axioma de elección» (que asegura que en cada conjunto no vacío se puede elegir un elemento) sirve de base para la mayor parte de la matemática que aparece en la práctica usual.

(9) $\forall x \exists y[y$ es una función con dominio $x \bigwedge \forall z(z \in x \bigwedge \exists u(u \in z) \rightarrow y(z) \in z)]$
(Axioma de elección) Intuitivamente, todo conjunto tiene una función de elección.

Observar que la expresión dentro del corchete no está totalmente expresada en el lenguaje de la teoría de conjuntos. Sin embargo, tanto «Ser función» como «Ser dominio de una función» son propiedades expresables en el lenguaje (¡hacerlo!), de manera que «*y* es una función con dominio *x*» queda también expresado en el lenguaje.

El axioma de elección es independiente de la teoría de Zermelo-Fraenkel. A partir de ZF no puede probarse ni el axioma de elección ni su negación. De manera que el axioma de elección da otro ejemplo de un enunciado indecidible para una teoría. En la práctica matemática habitual es una herramienta imprescindible para muchas construcciones.

Hay otros dos enunciados importantes en matemática que tienen un estatus similar. El primero de ellos es la llamada *Hipótesis del continuo*, que dice que entre el infinito de los números naturales y el infinito de los números reales (llamado *continuo*) no hay ningún tipo de infinito intermedio. El infinito de los números reales es también el infinito del conjunto Partes de N, es decir, del conjunto de todos los subconjuntos posibles de números naturales. La hipótesis del continuo dice entonces que entre el infinito de $\mathbb{N}$ y el infinito de $P(\mathbb{N})$ no hay ningún tipo de infinito intermedio.

El procedimiento de tomar partes de un conjunto infinito permite obtener siempre otro conjunto con un tipo de infinito estrictamente mayor que el dado. Este resultado fue probado por Cantor y se conoce con el nombre de Teorema de Cantor. (La demostración del Teorema de Cantor es conceptualmente similar a la demostración de que hay un enunciado no demostrable para la aritmética).

Tenemos así una torre de infinitos $\mathbb{N} < P(\mathbb{N}) < P(P(\mathbb{N}))$, etc.

El segundo infinito de esta torre es el del continuo. La llamada *Hipótesis generalizada del continuo* dice que entre un infinito cualquiera de esta torre y el infinito inmediato siguiente no hay ningún tipo de infinito intermedio.

TEORÍAS Y SUBTEORÍAS DE LA ARITMÉTICA

6. Los axiomas de Peano para la aritmética

Los axiomas de Peano (debidos en realidad a Richard Dedekind) tal como fueron escritos (en latín) originariamente son:

(1) 1 es un número natural.

(2) El sucesor inmediato de un número natural también es un número natural.

(3) 1 no es el sucesor inmediato de ningún número natural.

(4) Dos números naturales distintos no tienen el mismo sucesor inmediato.

(5) Toda propiedad verificada por 1 y por el sucesor inmediato de todo número que también verifique esa propiedad, es verificada por todos los números.

En términos matemáticos los axiomas suelen expresarse de este modo (donde la letra S representa al sucesor inmediato de un número, y $S(n)$ debe pensarse como el número que sigue a n, es decir, $n + 1$):

(1) 1 es un número natural.

(2) Si n es un número natural, $S(n)$ es un número natural.

(3) No existe n tal que $S(n) = 1$.

(4) Si $n \neq m$, entonces $S(n) \neq S(m)$.

(5) Si P es una propiedad tal que 1 verifica P y vale que si n verifica P, entonces también $S(n)$ verifica P, puede concluirse que todo número natural verifica P.

Observaciones:

1. Tal como en el caso de Euclides, los axiomas originales propuestos por Peano también incluían algunas afirmaciones lógicas sobre la igualdad. Los que listamos aquí son los axiomas referidos a las propiedades específicas de los números naturales.

2. El número correspondiente al símbolo 1, de acuerdo a esta axiomatización, es el primer elemento de los números naturales. En efecto, el axioma (3) dice que 1 no puede obtenerse como sucesor de ningún número. Sin embargo, insistimos en que el 1 debe verse como un símbolo (el símbolo del primer elemento del conjunto) y no necesariamente como el número 1 habitual. Es decir, tanto el conjunto $\{1, 2, 3, 4,\ldots\}$ como el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4,\ldots\}$ verifican los postulados. En el segundo caso, el número correspondiente al símbolo 1 será el

0. Es decir, la cuestión de si el número 0 pertenece o no a los naturales es no esencial. La condición esencial es que haya un primer elemento, más allá de cómo se lo llame.

3. El axioma (5), llamado principio o axioma de inducción, se escribe también de la siguiente manera, reemplazando la noción indefinida de «propiedad» por la de conjunto.

   (5*) Si **P** es un conjunto tal que 1 pertenece a **P**, y para todo n vale que si n pertenece a **P**, entonces $S(n)$ pertenece a **P**, puede concluirse que todos los números naturales pertenecen a **P**.

4. De la observación 3 resulta que el principio de inducción involucra una cuantificación sobre *subconjuntos* de números (y no ya sobre números). En términos simbólicos debería escribirse:

$$\forall A((1 \in A \bigwedge (n \in A \rightarrow S(n) \in A)) \rightarrow \forall n(n \in A))$$

Esto requiere el tipo de lenguaje llamado *de segundo orden*, donde los cuantificadores pueden aplicarse también a conjuntos (y no sólo a elementos). De manera que la axiomatización original dada por Peano es en realidad una axiomatización en un lenguaje de segundo orden.

Vale que esta axiomatización original de Peano caracteriza de manera esencialmente única a los números naturales, en el sentido de que dos modelos numerables que satisfacen los axiomas son isomorfos entre sí. (Véase [Boolos y Jeffrey].) Se llama a esto ω-categoricidad (omega categoricidad). Veamos ahora una adaptación de esta axiomatización original para los lenguajes de primer orden.

7. Aritmética de Peano de primer orden

Sea L = {+,·, S, 0}, donde +,·, son símbolos de funciones de dos variables, S es símbolo de función de una variable y 0 es símbolo de constante. La *aritmética de Peano de primer orden* tiene la siguiente lista de axiomas:

(1) $0 \neq S(x)$

(2) $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$

(3) $x + 0 = x$

(4) $x + S(y) = S(x + y)$

(5) $x \cdot 0 = 0$

(6) $x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x$

(7_φ) Principio de Inducción (restringido a propiedades expresables): Para cada fórmula $\varphi(x, v_1,\dots v_n)$ de L, el axioma $\varphi(0, v_1,\dots v_n) \to (\forall x(\varphi(x, v_1,\dots v_n) \to \varphi(S(x), v_1,\dots v_n)) \to \forall x\varphi(x, v_1,\dots v_n))$

Dado que las fórmulas de primer orden son un conjunto recursivo, es claro que esta axiomatización es recursiva. El principio de inducción, que en la axiomatización original de Peano vale para todo subconjunto de números naturales, queda restringido por la lista (7_φ) solamente a los subconjuntos de números naturales que pueden expresarse con una fórmula φ del lenguaje de la aritmética (nótese que la totalidad de los subconjuntos de los números naturales tiene el infinito del continuo, mientras que la totalidad de los subconjuntos expresables por fórmulas de primer orden tiene el infinito de los naturales) (véase el Ejercicio 1.5).

De acuerdo al Teorema de Gödel esta teoría es incompleta y ninguna extensión recursiva puede completarla.

Es interesante preguntarse aquí qué clase de propiedad «faltaría» expresar para tener completitud. Otra vez, como en el caso de los números complejos, lo que «falta» es expresar «Ser suma finita de unos». En efecto, si pudiera expresarse que «Todo elemento se obtiene como suma finita de unos», tendríamos la propiedad de ω-categoricidad (dos modelos numerables serían isomorfos). Como esta teoría está expresada en primer orden y todos sus modelos son infinitos, podría aplicarse el llamado Test de Łos-Vaught (véase [Chang y Keisler]) que asegura en este caso que la ω-categoricidad implica la completitud.

8. La teoría Q de Tarski, Mostowski y Robinson

Esta teoría tiene los axiomas (1) a (6) de la anterior y la lista (7_φ) se reemplaza por el único axioma:

(7) $\forall x(x \neq 0 \to \exists y(x = S(y)))$

Se obtiene así una teoría con una cantidad finita de axiomas, que es incompleta, y con la propiedad de que ningún agregado de una cantidad finita de axiomas puede completarla [Chang y Keisler].

9. Una axiomatización finita y no recursivamente completable de la aritmética

Consideremos L = {+,·, S, 0), los axiomas (1) a (7) de la teoría Q anterior y agregamos el axioma que proporciona el algoritmo de la división entera:

(8) $(y = xz + w \wedge w < x \wedge y = xq + r \wedge r < x) \rightarrow w = r$ (Unicidad del resto)

Ésta es una teoría para la aritmética dada por una cantidad finita de axiomas y que no es recursivamente completable [Mendelson].

10. La aritmética aditiva o aritmética de Presburger

Si consideramos el lenguaje $L' = \{S, 0\}$, junto con los axiomas (1)-(4) y la lista (infinita) (7_φ), restringida a las fórmulas de L' obtenemos la aritmética aditiva o *aritmética de Presburger*.

Éste es un ejemplo de una teoría recursiva completa y no finitamente axiomatizable [Chang y Keisler].

11. Teorías en apariencia próximas entre sí pueden ser una recursivamente axiomatizable y la otra no

Consideremos la teoría de los números naturales con el producto y el orden usual $T(\mathbf{N}; \cdot, \leq)$ y por otro lado la teoría de los números naturales con el producto y el orden usual pero *restringido a los números primos*. La primera de estas teorías no admite una axiomatización recursiva [Bes, Richard]. La segunda, en cambio, es recursivamente axiomatizable [Maurin].

APÉNDICE II

HITOS EN LA HISTORIA DEL TEOREMA DE INCOMPLETITUD

1. ARISTÓTELES Y EL INFINITO

Una cantidad es *potencialmente infinita* si es siempre finita pero puede ser aumentada tanto como se desee hasta superar cualquier cantidad prefijada. En cambio, una cantidad es *actualmente infinita* si ya es, de hecho, infinita. La idea del infinito potencial implica un proceso de crecimiento que nunca termina, el infinito actual, en cambio, da la idea de un hecho acabado.

Por ejemplo, cuando decimos que hay infinitos números naturales, para la concepción potencial estaríamos diciendo que, dada cualquier cantidad finita de números, siempre hay uno más, nunca se terminan (pero no es posible reunir a *todos* los números en un único conjunto). Para la concepción actual, por el contrario, estaríamos diciendo que hay, de hecho, una infinidad de números reunidos en una única totalidad.

Aristóteles formuló en el siglo IV a. C. esta distinción entre las dos formas de entender el infinito. A la vez que rechazó la validez del infinito actual, entre otros motivos, por ser inaccesible a nuestra experiencia. Este rechazo se mantuvo casi unánimemente, en la matemática y en la filosofía, hasta fines del siglo XVIII.

En su *Metafísica*, escribió (véase [Aristóteles]):

> La potencia y el acto, respecto del infinito, del vacío y de todos los seres del género se entienden de otra manera que respecto de la mayoría de los demás seres tales como lo que se ve, lo que anda o lo que es visto. En estos últimos casos la afirmación de la existencia puede ser verdadera, ya absolutamente, ya en tal circunstancia dada. Visible se dice, o de lo que es visto realmente, o de lo que puede ser visto. Pero la potencia respecto al infinito es de una naturaleza tal que el acto jamás puede realizarse, como no sea por el pensamiento.

2. GEORG CANTOR

A mediados de la década de 1870, una investigación sobre series trigonométricas llevó a Georg Cantor (1845-1918) a desarrollar de modo sistemático la teoría de conjuntos.[20] En 1883, en *Fundamentos para una Teoría General de Conjuntos*, incluido en [Cantor (2)], escribió:

> Es en el transcurso de muchos años de esfuerzos e investigaciones científicas que me he visto impulsado lógicamente, casi contra mi voluntad (pues se opone a tradiciones que habían llegado a ser muy apreciadas por mí), al punto de vista de considerar lo infinitamente grande no sólo en la forma de algo que crece sin límites […], sino también a fijarlo matemáticamente por medio de números en la forma determinada de lo completamente infinito;[21] y por ello no creo que se puedan hacer valer en contra razones que yo no estuviera en condiciones de afrontar.

En 1895, en *Contribuciones a la Fundamentación de la Teoría de los Números Transfinitos*, véase [Cantor (1)], dice: Por un «agregado»[22] entendemos cualquier reunión en un todo M de objetos bien definidos *m* de nuestra intuición o nuestro pensamiento. Estos objetos son llamados los «elementos» de M.

Al admitir la reunión ilimitada en un todo de objetos cualesquiera *de nuestra intuición o nuestro pensamiento* Cantor introduce en la matemática el infinito actual, no sin la fuerte oposición de muchos de sus contemporáneos.

3. Gottlob Frege y Bertrand Russell

Entre 1879 y 1902, en una serie de libros y artículos, Gottlob Frege (1848-1925) se dedica a fundamentar rigurosamente la aritmética (y a partir de ella toda la matemática) basándose en la lógica y la teoría de conjuntos. La obra principal de Frege, que resume todo su trabajo de muchos años, es *Fundamentos de la aritmética*, cuyo primer tomo se publicó en 1893 y el segundo, en 1903.

Poco antes de la publicación del segundo tomo Frege recibe una carta de Bertrand Russell (1872-1970). La carta (incluida en [van Heijenoort]) está fechada en Friday's Hill, Haslemere, el 16 de junio de 1902, y dice:

> Durante un año y medio me he estado familiarizando con sus *Fundamentos de la aritmética* pero solamente ahora he sido capaz de encontrar el tiempo para el estudio detallado que deseo hacer de su trabajo. Me encuentro en completo acuerdo con Ud. en lo esencial. […] Hay solamente un punto en el que he encontrado una dificultad. Usted afirma que una función[23] puede actuar como elemento indeterminado.

> Anteriormente estaba de acuerdo con este punto de vista, pero ahora me resulta dudoso a causa de la siguiente contradicción. Sea *w* el predicado: ser un predicado que no puede ser predicado de sí mismo. ¿Puede *w* ser predicado de sí mismo? De cualquier respuesta se sigue su negación. En consecuencia debemos concluir que *w* no es un predicado. Del mismo modo no hay una clase (una totalidad) de todas las clases que no pertenecen a sí mismas.

Bertrand Russell formula así por primera vez la paradoja que hoy lleva su nombre. La respuesta de Frege (también incluida en [Van Heijenoort]), fechada en Jena, el 22 de junio de 1902, dice:

> Su descubrimiento de la contradicción me ha causado una gran sorpresa y, casi diría, consternación, pues sacude las bases sobre las que he intentado edificar la aritmética. […]
>
> No sólo mi fundamentación de la aritmética, sino la posibilidad de cualquier otra fundamentación parece desvanecerse.

4. Luitzen Egbertus Jan Brouwer

El descubrimiento de la paradoja Russell precipita la *crisis de los fundamentos*, un período (entre 1905 y 1930, aproximadamente) durante el cual se debate la validez de la teoría de conjuntos y de los razonamientos que hacen uso del infinito actual.

La Escuela Intuicionista, creada por L. E. J. Brouwer (1881-1966), considera que las paradojas están causadas directamente por la introducción del infinito actual y que la teoría de conjuntos de Cantor es esencialmente errónea. Para Brouwer sólo tienen sentido aquellos enunciados cuya validez es verificable mecánicamente en una cantidad finita de pasos.

En su artículo de 1923, *Sobre el significado del principio de tercero excluido en matemáticas, especialmente en la teoría de funciones* (reproducido en [Van Heijenoort]), Brouwer escribe:

> Tan ampliamente se le ha atribuido un carácter *a priori* a las leyes de la lógica teórica que hasta muy recientemente esas leyes, entre ellas la del principio de tercero excluido, fueron aplicadas sin reservas inclusive a las matemáticas de sistemas infinitos y nos hemos permitido no preocuparnos por la consideración de que los resultados obtenidos de esta forma en general no admiten, ni práctica ni teóricamente, una corroboración empírica. Sobre esta base se han construido teorías

extensas e incorrectas, especialmente en el último medio siglo. Las contradicciones que, como resultado, se han encontrado repetidamente han dado lugar a la *crítica formalista*, una crítica que en esencia dice que el *lenguaje que acompaña a la actividad mental de los matemáticos* puede ser objeto de un estudio matemático. En tal estudio las leyes de la lógica teórica se presentan como operaciones que actúan sobre fórmulas primitivas o axiomas, y se establece el objetivo de transformar esos axiomas de tal modo que los efectos lingüísticos de las operaciones mencionadas (las cuales en sí mismas permanecen invariables) no conduzcan nuevamente a la aparición de la figura lingüística de una contradicción. No debemos desesperarnos por alcanzar ese objetivo pues carece de todo valor matemático. Una teoría matemática incorrecta, aun cuando no pueda ser invalidada por una contradicción que la refute, no por eso es menos incorrecta, así como una política delictiva no es menos delictiva porque no pueda ser anulada por una Corte de Justicia.

5. David Hilbert

Cuando el intuicionismo comienza a ganar adeptos (entre ellos matemáticos de primera línea como Henri Poincaré), David Hilbert (1862-1943) sale en defensa de la Teoría de Cantor. En 1925, en *Acerca del Infinito*, incluido en [Hilbert (1)], escribe:

> En mi opinión, el sistema de Cantor constituye no sólo la flor más admirable que el espíritu humano ha producido, sino igualmente uno de los logros más elevados de la actividad intelectual humana en general. […]
> Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros.

El programa que propone Hilbert intenta reconciliar la visión finitista del intuicionismo con la validez de la teoría de conjuntos. Dice en *Acerca del Infinito*:

> Por una parte encontramos en las matemáticas enunciados finitistas que no contienen sino numerales. Por ejemplo:
>
> $$3 > 2, 2 + 3 = 3 + 2, 2 = 3, 1 \neq 1$$
>
> De acuerdo con nuestro enfoque finitista, estos enunciados se presentan como algo inmediatamente intuitivo y comprensible, como algo

susceptible de ser negado, que es verdadero o falso, y en relación a lo cual podemos hacer valer sin ninguna clase de restricciones las reglas de la lógica aristotélica. El principio de no contradicción —esto es, un enunciado y su negación no pueden ser a la vez verdaderos— y el de «tercero excluido» —es decir, o bien un enunciado es verdadero, o bien lo es su negación— son aquí válidos. Así, si digo que este enunciado es falso, esto equivale a afirmar que su negación es verdadera.

Además de estos enunciados elementales absolutamente no problemáticos, encontramos enunciados finitistas que sí lo son, por ejemplo, aquellos que no se pueden descomponer en enunciados más simples.[24] Por último, hemos introducido también los enunciados ideales cuya función consiste en preservar la validez de las leyes usuales de la lógica.

Ahora bien, en tanto que no expresan afirmaciones finitistas, los enunciados ideales, esto es, las fórmulas, carecen de todo significado, por lo que no podemos aplicarles las operaciones lógicas de manera concreta[25] como a los enunciados finitistas. Se hace entonces necesario someter a un proceso de formalización tanto a las operaciones lógicas como a las demostraciones mismas.

En La Fundamentación de la Teoría Elemental de Números, de 1930, incluido en [Hilbert (1)] leemos:

La idea básica de mi teoría de la demostración es la siguiente: todo lo que hasta ahora ha formado parte de las matemáticas es objeto en ella de una formalización rigurosa.

[…]

Ciertas fórmulas que hacen las veces de fundamento del edificio formal de las matemáticas reciben el nombre de *axiomas*. Una *demostración* es una figura que debe presentarse ante nosotros como algo concreto y que consiste de inferencias. En estas inferencias, cada una de las premisas es o bien un axioma, o coincide con la fórmula final de una inferencia cuyas premisas ya aparecen en la demostración, o bien se obtiene por reemplazo en una fórmula de este tipo o en un axioma. En lugar de la inferencia concreta, lo que tenemos en la teoría de la demostración es un procedimiento puramente externo de acuerdo con la regla, a saber: la utilización del esquema de inferencia y la sustitución. Decimos, finalmente, que una fórmula es demostrable cuando es o bien un axioma o es la fórmula final de una demostración.

> A las matemáticas reales formalizadas de la manera que acabamos de describir se añade un elemento nuevo que podemos considerar como una nueva matemática, una *metamatemática*, que resulta necesaria para asegurar a aquélla, y en la que, a diferencia de los principios deductivos puramente formales de la matemática real, se recurre a la inferencia concreta, pero únicamente con el carácter no contradictorio de los axiomas.
>
> […]
>
> La más importante de nuestras tareas consiste en la demostración de los dos principios siguientes:
>
> 1. Una proposición es demostrable cuando se ha establecido que es consistente, esto es, no contradictoria.
> 2. Si puede establecerse que una cierta proposición P es consistente con los axiomas de la teoría de los números, es imposible demostrar que la negación de P también resulta consistente con esos mismos axiomas.

6. Kurt Gödel

Como ya sabemos, Kurt Gödel (1906-1978) demostró que el programa de Hilbert era irrealizable. En [Smorynski] se relata el modo en que Gödel expone por primera vez su teorema:

> Es el domingo 7 de septiembre de 1930. El lugar es Königsberg y la ocasión, un pequeño congreso sobre fundamentos de las matemáticas. Arend Heyting, el principal discípulo de L. E. J. Brouwer, ha hablado sobre intuicionismo; Rudolf Carnap, del Círculo de Viena, ha expuesto sobre logicismo; Johann (antes, Janos y dentro de pocos años, Johnny) von Neumann ha explicado la teoría de Hilbert de la demostración —el así llamado formalismo—; y Hans Hahn propuso sus propia visión empirista de las matemáticas. La sesión queda abierta para la discusión. Heyting anuncia su satisfacción por el encuentro; para él, la relación entre el formalismo y el intuicionismo ha sido clarificada y no es necesario que continúe la guerra entre intuicionistas y formalistas. Una vez que los formalistas hayan completado exitosamente el programa de Hilbert y mostrado de modo «finitista» que las matemáticas «ideales» objetadas por Brouwer no permiten demostrar enunciados «con

sentido» que sean nuevos,[26] incluso los intuicionistas abrazarán cordialmente el infinito.

Ante esta eufórica revelación, un joven hace tímidamente esta advertencia: «de acuerdo con la concepción formalista, uno adjunta a los enunciados con sentido de la matemática (seudo)enunciados transfinitos que no tienen sentido en sí mismos sino que sólo sirven para que el sistema quede bien equilibrado, así como en la geometría se obtiene un sistema bien equilibrado mediante la introducción de puntos en el infinito». Esta concepción presupone que cuando uno agrega al sistema S de enunciados con sentido el sistema T de enunciados y axiomas transfinitos y demuestra un enunciado partiendo de S y pasando por enunciados de T entonces este enunciado es también correcto, porque el agregado de los axiomas transfinitos no permite que un enunciado falso sea demostrable. Comúnmente este requerimiento es reemplazado por el de la consistencia. Quisiera indicar que estos dos requerimientos no pueden ser vistos de ninguna manera como inmediatamente equivalentes. Pues, si un enunciado con sentido *P* es demostrable en un sistema formal consistente A (digamos, de la aritmética clásica), entonces todo lo que sigue de la consistencia de A es que *no-P* no es demostrable dentro del sistema A. No obstante, es aún concebible que uno pueda reconocer el enunciado *no-P* a través de consideraciones conceptuales (intuitivas) que no pueden ser formalmente representadas en A. En ese caso, a pesar de la consistencia de A, podría ser demostrable en A un enunciado cuya falsedad sea reconocible mediante consideraciones finitas. Sin embargo, tan pronto como se construye un concepto suficientemente estricto de «enunciado con sentido» (por ejemplo, restringiéndolo a ecuaciones numéricas finitas) esto no podrá ocurrir. Por otra parte podría ser enteramente posible, por ejemplo, que uno pueda demostrar con los métodos transfinitos de la matemática clásica un enunciado de la forma $\exists x \mathrm{F}(x)$, donde F es una propiedad finita de los números naturales (por ejemplo, la negación de la conjetura de Goldbach tiene esta forma) y por otra parte reconocer mediante consideraciones conceptuales que todos los números tienen la propiedad *no F*; y lo que quiero indicar es que esto es posible aun si uno ha verificado la consistencia del sistema formal de la matemática clásica. Por lo que no se puede afirmar con certeza de cualquier sistema formal que todas las consideraciones conceptuales son representables en él.

Esta incisiva crítica al programa de Hilbert provocó solamente un comentario de von Neumann: «No se ha establecido que todos los

modos de inferencia intuitivamente permitidos puedan ser representados formalmente».

El joven sostuvo su posición más firmemente: «se puede (bajo la suposición de la consistencia de la matemática clásica) dar ejemplos de enunciados (inclusive del tipo de la conjetura de Goldbach o de Fermat) que son conceptualmente correctos pero indemostrables en el sistema formal de la matemática clásica. En consecuencia, si se adjunta la negación de tal afirmación a los axiomas de la matemática clásica, entonces se obtiene un sistema consistente en el que una afirmación conceptualmente falsa es demostrable». […] «Kurt Gödel acababa de hacer el primer anuncio público de su celebrado Primer Teorema de Incompletitud».

El 22 de enero de 1931, en Viena, Gödel vuelve a exponer su Teorema de Incompletitud. La comunicación fue publicada en 1932 con el título de *Sobre completitud y consistencia* y está incluida en [Gödel (1)]:

Sea Z el sistema formal que se obtiene al añadir a los axiomas de Peano el esquema de definición recursiva (sobre una variable) y las reglas del cálculo lógico de primer orden. Por tanto, Z no debe contener más variables que las variables de individuos (es decir, de números naturales). […] Entonces ocurre:

1. Cada sistema formal S que abarque Z y que tenga un número finito de axiomas y las reglas de sustitución e implicación como únicos principios de inferencia, es incompleto, es decir, en él hay enunciados (que son también enunciados de Z) indecidibles a partir de los axiomas de S, suponiendo que S sea ω-consistente. […]
2. En cada tal sistema S es indeducible el enunciado de que S es consistente (más exactamente, el enunciado aritmético equivalente que se obtiene al asignar biunívocamente números naturales a las fórmulas).

Los teoremas 1 y 2 valen también para sistemas formales con un número infinito de axiomas y con otros principios de inferencia distintos de los indicados, suponiendo que cuando enumeramos las fórmulas […] la clase de los números asignados a los axiomas sea definible y decidible en el sistema Z, así como también la relación […] «la fórmula con el número x_1 es deducible de las fórmulas con los

números x_2, …, x_n aplicando una sola vez una de las reglas de inferencia».[27] […]

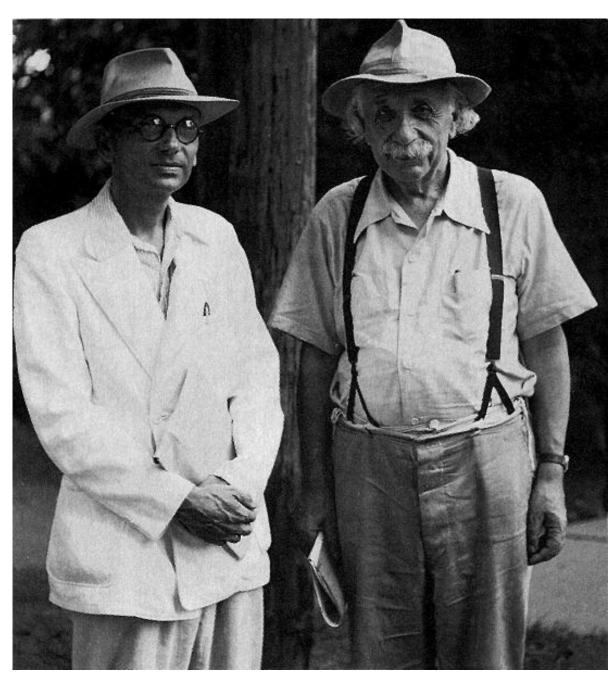
Si nos imaginamos que el sistema Z es sucesivamente ampliado por la introducción de variables para clases de números, para clases de clases de números, etc., así como de los correspondientes axiomas de comprensión, entonces obtenemos una sucesión (continuable en lo transfinito) de sistemas formales que cumplen los supuestos antes señalados, y resulta que la consistencia (ω-consistencia) de cada uno de estos sistemas formales es demostrable en todos los siguientes. También los enunciados indecidibles construidos para probar el teorema 1 se vuelven decidibles al añadir tipos superiores[28] y los correspondientes axiomas; pero en los sistemas superiores podemos construir otros enunciados indecidibles por el mismo procedimiento, etc. Todos los enunciados así construidos son expresables en Z (y por tanto son enunciados numéricos), pero no son decidibles en Z, sino sólo en sistemas superiores, como el del análisis.

El texto de Gödel termina con la afirmación de que ciertos enunciados indecidibles de Z se vuelven decidibles si se incluyen axiomas que impliquen la existencia de conjuntos actualmente infinitos:

Si construimos la matemática sin tipos, como ocurre con la teoría axiomática de conjuntos, el lugar de las extensiones de tipo es ocupado por los axiomas de cardinalidad[29] (es decir, axiomas que requieren la existencia de conjuntos de cardinalidad cada vez mayor), y de aquí se sigue que ciertos enunciados indecidibles en Z se vuelven decidibles mediante la introducción de axiomas de cardinalidad.

APÉNDICE III

KURT GÖDEL, EL SEÑOR POR QUÉ



Kurt Gödel (en la imagen con Albert Einstein) nació el 28 de abril de 1906 en Brünn (Moravia, Imperio Austro-Húngaro), hoy Brno (República Checa). Su familia, germanoparlante, era de muy buena posición económica y Gödel tuvo una infancia feliz, aunque fue un niño muy tímido y apegado a su madre. Debido a su curiosidad insaciable, lo llamaban *Herr Warum*, el señor Por Qué.

A la edad de ocho años sufrió un ataque de fiebre reumática, del que se recuperó por completo. Sin embargo, al leer acerca de su enfermedad, se enteró de que podía causar una debilidad permanente del corazón y, aunque los médicos insistieron en asegurarle lo contrario, quedó convencido por el resto de su vida de que su corazón había sido afectado por la fiebre.

Su hermano mayor Rudolf, que llegó a ser un prestigioso médico en Viena, afirmó años después que este incidente fue probablemente la causa de la hipocondría de Kurt, una característica dominante de su personalidad.

En la escuela se destacó sobre todo en matemática e idiomas (Gödel hablaba con fluidez el inglés y el francés y en su biblioteca había numerosos diccionarios y gramáticas de idiomas extranjeros).

En 1923 ingresó en la Universidad de Viena, donde estudió matemática, física y filosofía. Aunque inicialmente pensó en especializarse en física teórica, se decidió después por la matemática.

Por aquella época muchos de sus profesores eran miembros del Círculo de Viena: un grupo de matemáticos, físicos y filósofos que se reunían periódicamente para debatir sobre la relación entre la ciencia teórica y la realidad objetiva.

El grupo fue acercándose gradualmente a la posición conocida como *positivismo lógico*. Gödel asistió a muchas reuniones del Círculo y, aunque fue influido por sus ideas, dejó claro que no coincidía del todo con ellas.

En 1929 completó su tesis doctoral. En ella demostró el hoy llamado *Teorema de Completitud de Gödel*. Este teorema se refiere a la lógica de predicados, es decir, a

las afirmaciones, válidas en todo contexto, que sustentan el razonamiento matemático. Por ejemplo, la ley de tercero excluido: «O bien vale una afirmación, o bien vale su negación».

En su teorema Gödel probó que es posible dar axiomas que permiten demostrar todas las afirmaciones de esta clase.

Hacia 1930 casi todos los matemáticos estaban convencidos de que en todas las teorías sería posible encontrar teoremas de completitud similares: elegidos adecuadamente los axiomas, toda afirmación verdadera en la teoría sería deducible.

Sin embargo, Gödel demostró que esto no es así. En su famoso *Primer Teorema de Incompletitud* probó que la aritmética elemental es esencialmente incompleta: no es posible dar axiomas que permitan demostrar todas las verdades de la teoría.

De manera que Gödel probó un Teorema de Completitud (para la lógica de predicados) y uno de Incompletitud (para la aritmética).

Años más tarde comentó que la dificultad de la demostración de su Teorema de Completitud le dio la primera pauta de que, contra toda opinión, podía haber teorías esencialmente incompletas. Si la validez de la completitud había sido tan difícil de probar para la lógica básica, tal vez para teorías matemáticamente más complejas simplemente fuera falsa.

Su famoso Teorema de Incompletitud para la aritmética fue publicado en 1931. Más tarde presentó ese artículo para su incorporación al cuerpo docente de la Universidad de Viena. Al año siguiente le fue otorgado el cargo de *Privatdozent* (docente sin remuneración).

Mientas tanto, en 1933 Hitler llegó al poder en Alemania. Aunque Gödel siempre rechazó las ideologías totalitarias, nunca hizo declaraciones públicas al respecto, por lo que, en principio, el ascenso de Hitler no afectó su vida en Viena.

Entre 1933 y 1939 viajó muchas veces al recién creado Instituto de Estudios Avanzados de Princeton para dar clases y conferencias, que contribuyeron sustancialmente al desarrollo de la escuela norteamericana de lógica fundada por Emil Post y Alonzo Church.

En esos años, la situación en Austria fue empeorando. En 1936, Moritz Schlick, líder del Círculo de Viena y profesor de filosofía de Gödel, fue asesinado por un estudiante pronazi y Gödel cayó en una depresión nerviosa (una de las muchas que padeció a lo largo de su vida).

En marzo de 1938 Austria fue anexada por Alemania. En noviembre de ese mismo año Gödel se casó con Adele Porkert, varios años mayor que él, a quien había conocido en 1927.

En 1939 fue incluido en una lista negra, tal vez simplemente por ser un intelectual, o por sus amistades judías o por su relación con el Círculo de Viena (o por todo a la vez). En ese año fue atacado por un grupo de estudiantes de ultraderecha.

También en 1939, después del comienzo de la guerra, Gödel fue convocado por el ejército alemán y, a pesar de su mala salud, fue considerado apto para servir en el frente de batalla.

Gödel se comunicó de inmediato con Oswald Veblen, director del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, que le ofreció un cargo de profesor visitante. Gödel y su esposa abandonaron Viena en enero de 1940; a causa del bloqueo inglés, debieron viajar a Estados Unidos por el camino más largo: a través de Rusia, Japón y el Océano Pacífico.

En 1940 se incorporó al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton con un cargo que debía ser renovado cada año. En 1946 fue aceptado de modo permanente y en 1948 adoptó la nacionalidad norteamericana.

Gödel nunca regresó a Europa e incluso rechazó todos los honores que, muchos años después, le otorgó la Universidad de Viena.

Gödel no era muy sociable y cultivó pocas (aunque intensas) relaciones personales. Una de las más notables fue su amistad con Albert Einstein. Se conocieron en Princeton y solían pasear y conversar diariamente. Es destacable que los únicos trabajos científicos de importancia publicados por Gödel no relacionados con la lógica se refieren, todos ellos, a la Teoría de la Relatividad.

Aunque todavía publicó algunos trabajos relevantes, en Estados Unidos la producción matemática de Gödel pareció declinar. Esto se debió a muchos factores. Por ejemplo, durante ese período Gödel dedicó mucho de su tiempo a la filosofía. No solamente a las consecuencias filosóficas de sus teoremas, sino también al estudio de los trabajos de Leibniz y al problema de la existencia de Dios y de la transmigración de las almas.

A medida que pasaban los años en Princeton, su inestabilidad mental y su hipocondría fueron empeorando. Su esposa era un gran apoyo para él, pero en 1977 ella misma comenzó a sufrir problemas de salud y ya no pudo cuidarlo.

Hacia el final de sus días Gödel vivía convencido de que lo estaban envenenando, por lo que casi dejó de comer. Esto lo debilitó progresivamente hasta que murió el 14 de enero de 1978 en el hospital de Princeton.

CRONOLOGÍA DE LA VIDA DE GÖDEL

1906: Kurt Gödel nace el 28 de abril.

1914: Sufre un ataque de fiebre reumática. Por el resto de su vida cree que su corazón ha quedado debilitado por la fiebre.

1923: Ingresa en la Universidad de Viena. Durante ese período asiste a las reuniones del Círculo de Viena.

1929: Completa su tesis doctoral. En ella demuestra que toda fórmula universalmente válida de la lógica de primer orden es deducible a partir de axiomas. La tesis es aceptada en febrero de 1930.

1930: Reescribe su tesis doctoral en forma de artículo, que se publica con el título *La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden*. Asiste a un congreso sobre fundamentos de las matemáticas en Königsberg. Allí enuncia públicamente su Primer Teorema de Incompletitud.

1931: Se publica *Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sistemas relacionados*, donde enuncia y demuestra sus Teoremas de Incompletitud y Consistencia.

1933: Es aceptado como *Privatdozent* (docente sin remuneración) en la Universidad de Viena.

1933 a 1939: Da una serie de conferencias en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton que contribuyen al desarrollo de la lógica matemática en Estados Unidos.

1936: Moritz Schlick, líder del Círculo de Viena y profesor de filosofía de Gödel, es asesinado por un estudiante pronazi.

1934: Se publica *Sobre sentencias indecidibles de sistemas formales matemáticos*, basado en las notas que Stephen Kleene y John B. Rosser tomaron de sus primeras conferencias en Princeton.

1938: Austria es anexada por la Alemania nazi. En noviembre de ese mismo año Gödel se casa con Adele Porkert, varios años mayor que él, y divorciada, a quien había conocido en 1927. No tienen hijos.

1939: Es convocado por el ejército alemán y considerado apto para servir en el frente, por lo que decide emigrar a Estados Unidos.

1940: Se incorpora al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Se publica *La consistencia del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos*.

1946: Es incorporado de modo permanente al Instituto de Estudios avanzados (hasta ese momento su cargo debía ser renovado anualmente).

1947: Se publica *¿Qué es el problema del continuo de Cantor?*, sobre cuestiones filosóficas relativas a la (por entonces sólo conjeturada) indecidibilidad de la hipótesis del continuo. Aquí Gödel expone con claridad su adhesión al platonismo (filosofía que postula la existencia real de los objetos matemáticos).

1948: Adopta la ciudadanía estadounidense.

1949: Se publica *Un ejemplo de un nuevo tipo de soluciones cosmológicas a las ecuaciones einstenianas del campo gravitatorio* y también *Una observación sobre la relación entre la teoría de la relatividad y la filosofía idealista*.

1950: Se publica *Universos rotatorios en la teoría general de la relatividad*. Junto con los dos anteriores, los únicos trabajos de Gödel sobre física, probablemente resultado de sus conversaciones diarias con Einstein en Princeton.

1951: Es invitado a dar la *Conferencia Gibbs* en la reunión anual de la American Mathematical Society y elige disertar sobre las consecuencias filosóficas de sus teoremas de Incompletitud. En esta conferencia, que nunca se decidió a publicar, Gödel afirma esencialmente que sus teoremas podrían sustentar el punto de vista platonista (estas conclusiones han sido posteriormente cuestionadas por S. Feferman y P. Raatikainen).

1958: Se publica *Sobre una ampliación todavía no utilizada del punto de vista finitario*, donde analiza posibles ampliaciones de la lógica finitista de Hilbert.

1978: El 14 de enero muere en Princeton, Estados Unidos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARISTÓTELES, *Metafísica*, Espasa-Calpe Mexicana, México D. F., 1960.

BERNAYS, PAUL, *The Philosophy of Mathematics and Hilbert's Proof Theory (1930)*, Bernays Proyect: Text No. 9 (puede verse online: www.phil.cmu.edu/projects/bernays).

BES, A., y RICHARD D., «Undecidable Extensions of Skolem Arithmetic», *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 63 (2), 1998.

BOOLOS, G., «A new proof of the Gödel incompleteness theorem», *Notices Amer. Math. Soc.* 36 (4), 1989, pp. 388-390.

BOOLOS, G. y R. JEFFREY, *Computability and logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

BORGES, JORGE LUIS, «La génesis de "El cuervo" de Poe», *Textos recobrados (1931-1955)*, Emecé, Buenos Aires, 2001.

BOUVERESSE, JACQUES, *Prodigios y vértigos de la analogía*, Libros del Zorzal, 2005.

CAICEDO, XAVIER, «La paradoja de Berry revisitada, o la indefinibilidad de la definibilidad y las limitaciones de los formalismos», *Lecturas matemáticas, Soc. Colombiana de Matemática*, vol. XIV, n.º 1-2-3, Bogotá, 1993.

CANTOR, G., (1) *Contributions to the Pounding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover Publications, Nueva York, 1955.

CANTOR, G., (2) (edición de José Ferreirós), *Fundamentos para una Teoría General de Conjuntos*, Crítica, Barcelona, 2006.

CASTI, J. L. y W. DE PAULI, *Gödel, a Life of Logic*, Perseus Publishing, 2000.

CHANG, C. C., y H. J. KEISLER, *Model Theory. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, North-Holland, 1973.

DAVIS, MARTIN, *The Undecidable. Basic papers on undecidable proposition, unsolvable problems and computable functions*, Dover Publications, Mineola, 1993.

DAVIS, MARTIN, R. SIGAL, y E. WEYUKER, *Computability, Complexity, and Langauges*, Morgan Kaufmann Publishers, 1994.

DAVIS, M., YURI MATIJASEVICH y J. ROBINSON, *Hilbert's tenth problem: Diophantine equations: positive aspects of a negative solution, Mathematical developments*

arising from Hilbert problems, Proc. Sympos. Pure Math., XXVIII, 323-378, Amer. Math. Soc., Providence, R.I, 1976.

FEFERMAN, S., *Are There Absolutely {Insolvable Problems*? *Gödel's Dichotomy, Philosophia Mathematica (III)* 14, 134-152, Advance Access, 2006 (puede verse online: math.stanford.edu/~/gerferman/papers/dichotomy.pdf).

GABBAY, D. M., C. J. HOGGER y J. A. ROBINSON (eds.). «Classical *vs*. non-classical logic», *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, vol. 2, chapter 2.6, Oxford University Press, 1994.

GENTZEN, G., *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*, Math. Am., 112 (1936), 493-565.

GÖDEL, KURT, (1) *Obras Completas*, Alianza Editorial, Madrid, 1981.

GÖDEL, KURT, (2) Conferencia Gibbs (puede verse online). Edición en español: *Kurt Gödel. Ensayos inéditos*, Francisco Rodríguez Consuegra (ed.), Mondadori, Barcelona, 1994.

GOLDSTEIN, REBECCA, *Incompleteness, The Proof and Paradox of Kurt Gödel*, Norton & Company, Inc., Nueva York, 2005.

VAN HEIJENOORT, J. (comp.), *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Nueva York, 1977.

HILBERT, DAVID, (1) *Fundamentos de las Matemáticas*, Mathema, México D. F., 1993.

HILBERT, DAVID, (2) *Grundlagen der Geometrie* (1899) (hay ed. ing.: *Foundations of Geometry*, Project Gutenberg, e-text 17384, puede verse online: www.gutenberg.org/ebooks/17384).

KRISTEVA, JULIA, *Semiótica 1*, Espiral, Madrid, 2001.

LACAN, JACQUES, *El seminario, Libro 16: De un Otro al otro*, Paidós, 2008.

LYOTARD, JEAN-FRANÇOIS, *La condición posmoderna*, Cátedra, Madrid, 2008.

MATIJASEVICH, YURI, *Hilbert's Tenth Problem*, The Mitt Press, Cambridge, 1993.

MAURIN, F., «The Theory of Integer Multiplication with Order Restricted to Primes is Decidable», *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 62, 1997, n.º 1, pp. 123-130.

MENDELSON, E., *Introduction to Mathematical Logic*, Chapman & Hall, 1997.

PRESBURGER, M., «Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt», *Comptes Rendus du I Congrès de Mathématiciens des Pays Slaves*, Varsovia, 92-101 (1929).

QUINE, W. V. O., «Concatenation as a Basis for Arithmetic», *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 11, 1946, pp. 105-114.

RAATIKAINEN, PANU, «On the Philosophical Relevance of Gödel's Incompleteness Theorems», *Revue Internationale de Philosophie 59*, n.º 4 (edición especial dedicada a Gödel).

ROSSER, J. B., «Extensions of Some Theorems of Gödel and Church», *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 1, 1936, pp. 87-91.

SMORYNSKI, C., *Self-Reference and Modal Logic*, Springer-Verlag, Nueva York, 1985.

SMULLYAN, R., *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, Nueva York, 1992.

SOKAL, ALAN y JEAN BRICMONT, *Imposturas intelectuales*, Paidós, Barcelona, 1999.

TARSKI, A., «Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen», *Anzeiger der Akademie der Wissenchaften in Wien*, 69,1932, 23-25.

TASIC, VLADIMIR, *Una lectura matemática del pensamiento posmoderno* , Colihue, Buenos Aires, 2001.

WASSERMAN, H., «A Second Order Axiomatic Theory of Strings», *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. XIX, 4, 1978.

LECTURAS RECOMENDADAS

ARBIB, M., *Cerebros, máquinas y matemáticas*, Alianza Editorial, Madrid, 1982.

DAVIS, M., *Computability and Unsolvability*, Dover Publications, Nueva York, 1982.

FREGE, G., *Estudios sobre semántica*, Ediciones Orbis, México, 1985.

GRAY, J., *El reto de Hilbert (Los 23 problemas que desafiaron a la matemática)*, Crítica (Drakontos), Barcelona, 2003.

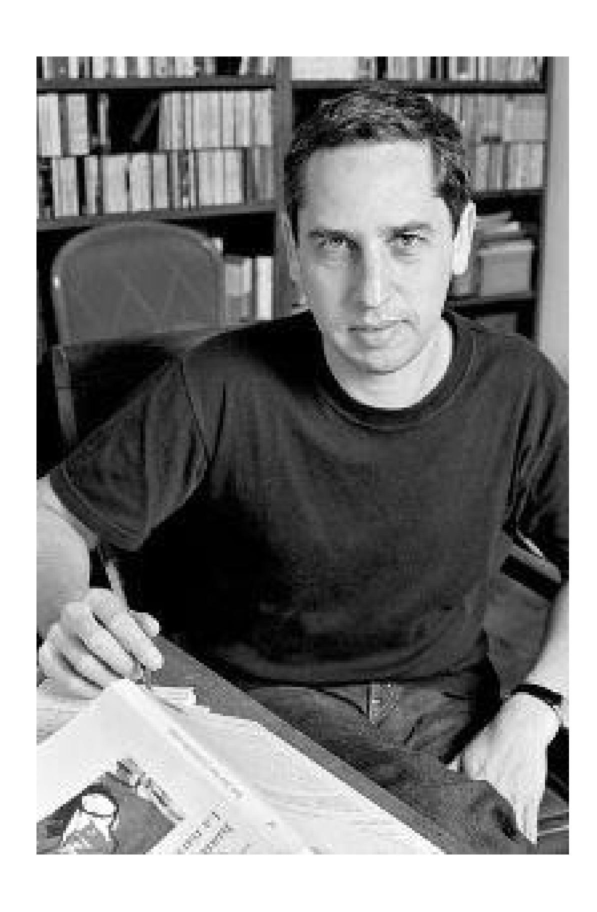
LAVINE, S., *Comprendiendo el infinito*, Fondo de Cultura Económica, México, 2005.

NAGEL, E. y J. R. NEWMAN, *El Teorema de Gödel*, Editorial Tecnos, Madrid, 1994.

RUSSELL, B., *Introducción a la Filosofía Matemática*, Paidós, Barcelona, 1988.

SMULLYAN, R., *First Order Logic*, Dover Publications, Nueva York, 1995.

TYMOCZKO, T. (comp.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 1998.



GUILLERMO MARTÍNEZ. (Bahía Blanca, Argentina, 29 de julio de 1962). Es un escritor y matemático argentino. Licenciado en Matemáticas en la Universidad Nacional del Sur en 1981, se doctoró en la de Buenos aires, completando su postgrado en la de Oxford. Es profesor de la Universidad de Buenos Aires. Colabora habitualmente en varios periódicos. Autor de cuentos, novelas y ensayos, se caracteriza en sus novelas, de temática diversa, por su narrativa precisa, clara y sencilla. Es conocido fundamentalmente por su novela *Crímenes imperceptibles,* llevada al cine con el título de *Los crímenes de Oxford*. Ha recibido numerosos premios; por ejemplo, en 2006, fue galardonado con el Premio Mandarache Jóvenes Lectores de Cartagena, cuyo premio fue entregado por el director Álex de la Iglesia, quien dirigió la película basada en su libro *Crímenes imperceptibles*.



GUSTAVO PIÑEIRO. (Buenos Aires, 1966). Es un matemático y escritor argentino. Licenciado en Matemáticas, graduado en la Universidad de Buenos Aires en 1992.

Actualmente trabaja como docente en instituciones de nivel terciario y universitario, y desde hace varios años participa en la redacción de libros de texto para el nivel medio. También colabora habitualmente, tanto en revistas de divulgación científica como en otras dedicadas a los juegos de lógica e ingenio.

En 2009, junto a Guillermo Martínez, publica *Gödel ∀ (para todos)*.

Índice de contenido

Notas

[1] Se refieren al ensayo «Divulgación» de *Uno y el universo* (1945). Sabato intenta explicar a un amigo la teoría de Einstein y le habla con entusiasmo de tensores y geodésicas. El amigo no entiende una palabra. Sabato hace un segundo intento con menos entusiasmo: conserva todavía algunas geodésicas pero hace intervenir aviadores y disparos de revólver. El amigo, con alegría, le dice que empieza a entender. Sabato se dedica entonces exclusivamente a jefes de estación que disparan revólveres y verifican tiempos con un cronómetro, trenes y campanas. «¡Ahora sí entiendo la relatividad!», exclama el amigo. «Sí», responde Sabato amargamente, «pero ahora no es más la relatividad». (*N. del E.*) **<<**

[2] A principios del siglo XIX, C. F. Gauss, J. Bolyai y N. Lobachevski, independientemente unos de otros, conjeturaron que la negación del quinto postulado de Euclides no conduciría a una contradicción, sino a otros «mundos geométricos» posibles. Esta conjetura fue demostrada por Eugenio Beltrami en 1868. <<

[3] Con más precisión puede decirse que:

1. 0 es un término;
2. toda variable es un término;
3. si u y t son términos entonces las expresiones $\mathrm{S}u$, $(u + t)$ y $(u \cdot t)$ son términos;
4. todo término se obtiene por aplicación sucesiva de las tres reglas anteriores. <<

[4] Con más precisión puede decirse que:

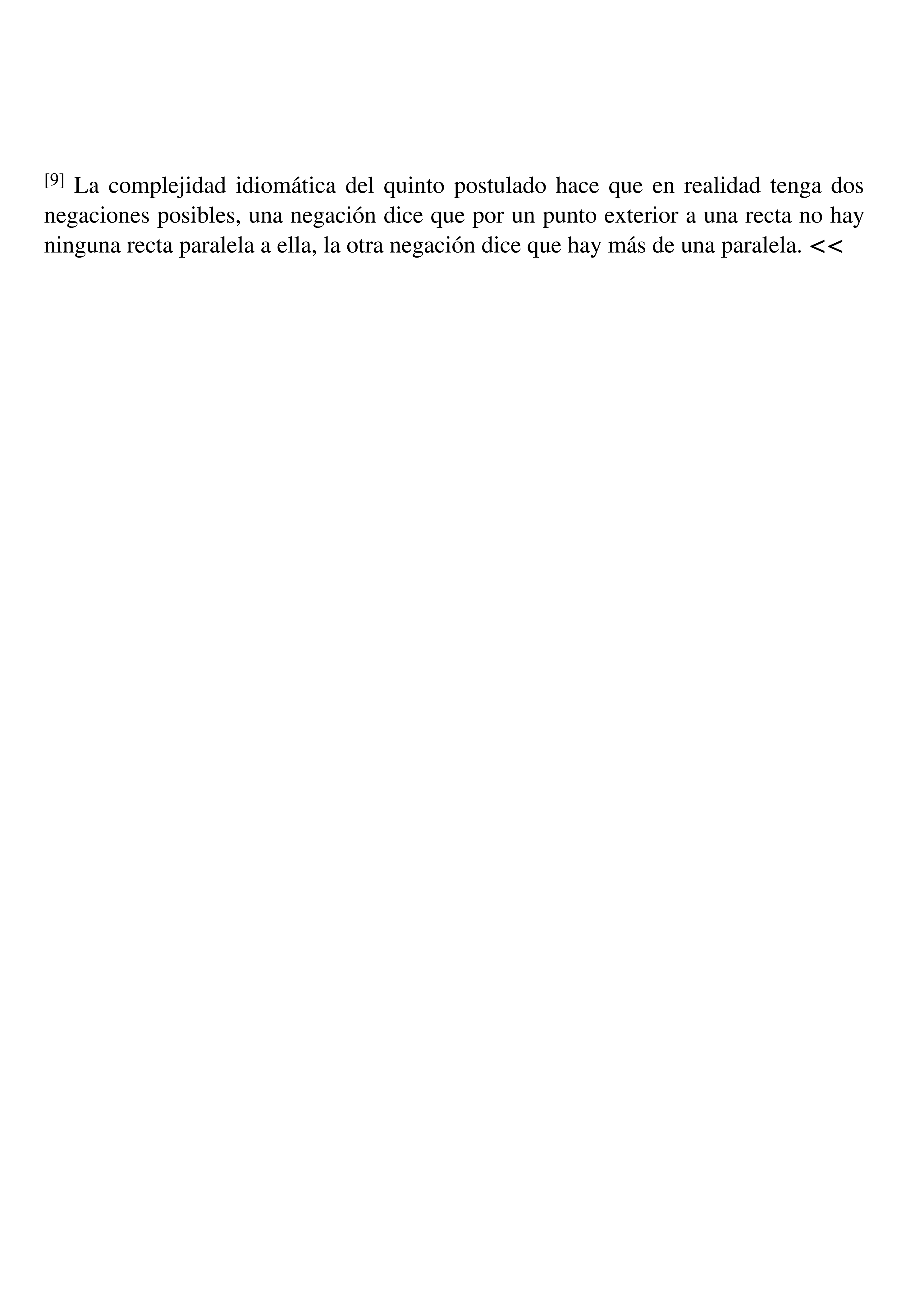
1. las fórmulas atómicas son fórmulas;
2. si F es una fórmula entonces ¬F es una fórmula;
3. si E y F son fórmulas entonces (E → F) es una fórmula;
4. si F es una fórmula y *x* es una variable numerada, entonces (∀*x*F) es una fórmula;
5. toda fórmula se obtiene por la aplicación de alguna de las cuatro reglas anteriores. La utilización de paréntesis asegura la unicidad de la escritura, pero en lo sucesivo utilizaremos sólo los paréntesis que sean realmente necesarios, como es la práctica usual al escribir fórmulas lógicas. <<

[5] Una misma variable puede aparecer más de una vez en una fórmula. Por ejemplo, en la fórmula $(v_1 = 0 \rightarrow \forall v_2(v_1 \cdot v_2 = 0)) \bigwedge (v_2 = 0 \rightarrow \forall v_1(v_1 \cdot v_2 = 0))$ la variable v_1 aparece (u ocurre, como se dice en Lógica) cuatro veces y también v_2 aparece cuatro veces. **<<**

[6] Por ejemplo, en $(v_1 = 0 \rightarrow \forall v_2(v_1 \cdot v_2 = 0)) \bigwedge (v_2 = 0 \rightarrow \forall v_1(v_1 \cdot v_2 = 0))$ la variable v_1 aparece libre la primera vez y también la segunda. En cambio en la tercera aparición y la cuarta está afectada por el cuantificador $\forall$. La variable v_2 aparece afectada por cuantificadores la primera y la segunda vez y aparece libre la tercera vez y la cuarta. <<

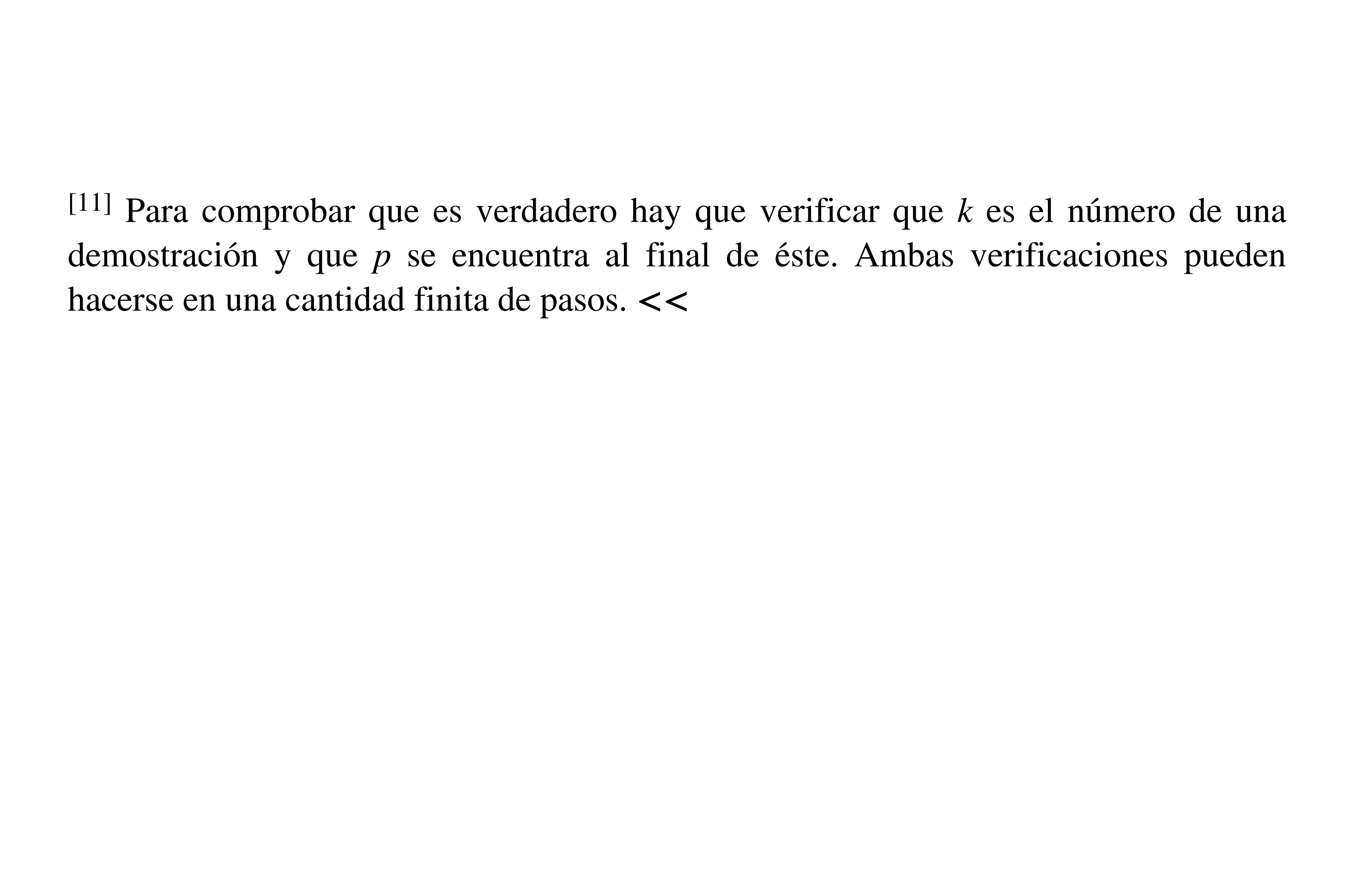
[7] «Primer orden» se refiere a que los cuantificadores se aplican solamente a elementos, en este caso números. En lógicas de orden superior se admite cuantificación sobre conjuntos de elementos, funciones, etcétera. **<<**

[8] ¿Por qué distintos de 0? La razón quedará clara en el capítulo 7. <<



[9] La complejidad idiomática del quinto postulado hace que en realidad tenga dos negaciones posibles, una negación dice que por un punto exterior a una recta no hay ninguna recta paralela a ella, la otra negación dice que hay más de una paralela. <<

[10] En matemáticas el prefijo «ω» (la letra griega omega minúscula) suele usarse para indicar propiedades que involucran la idea de infinitud. **<<**

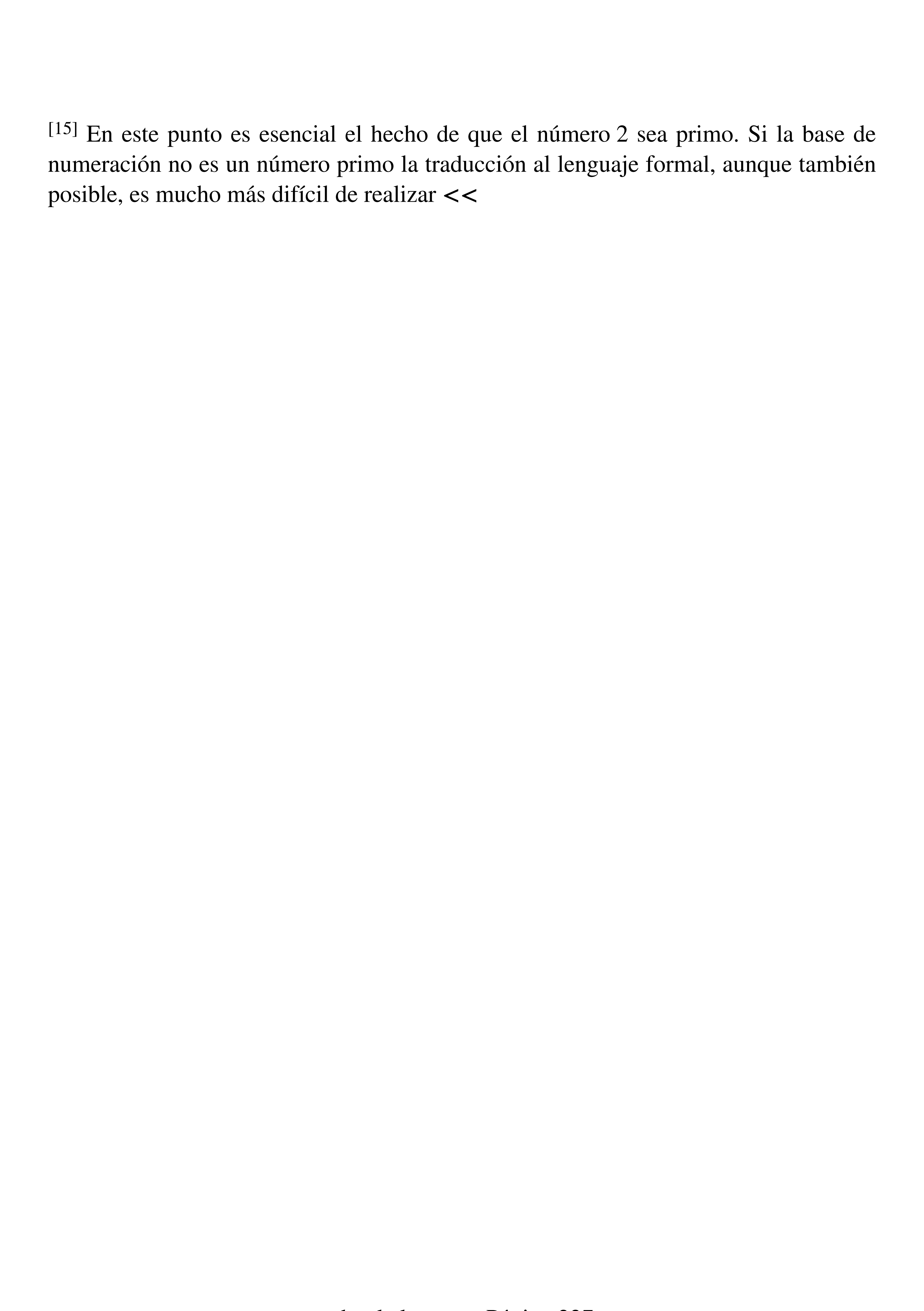


[11] Para comprobar que es verdadero hay que verificar que *k* es el número de una demostración y que *p* se encuentra al final de éste. Ambas verificaciones pueden hacerse en una cantidad finita de pasos. **<<**

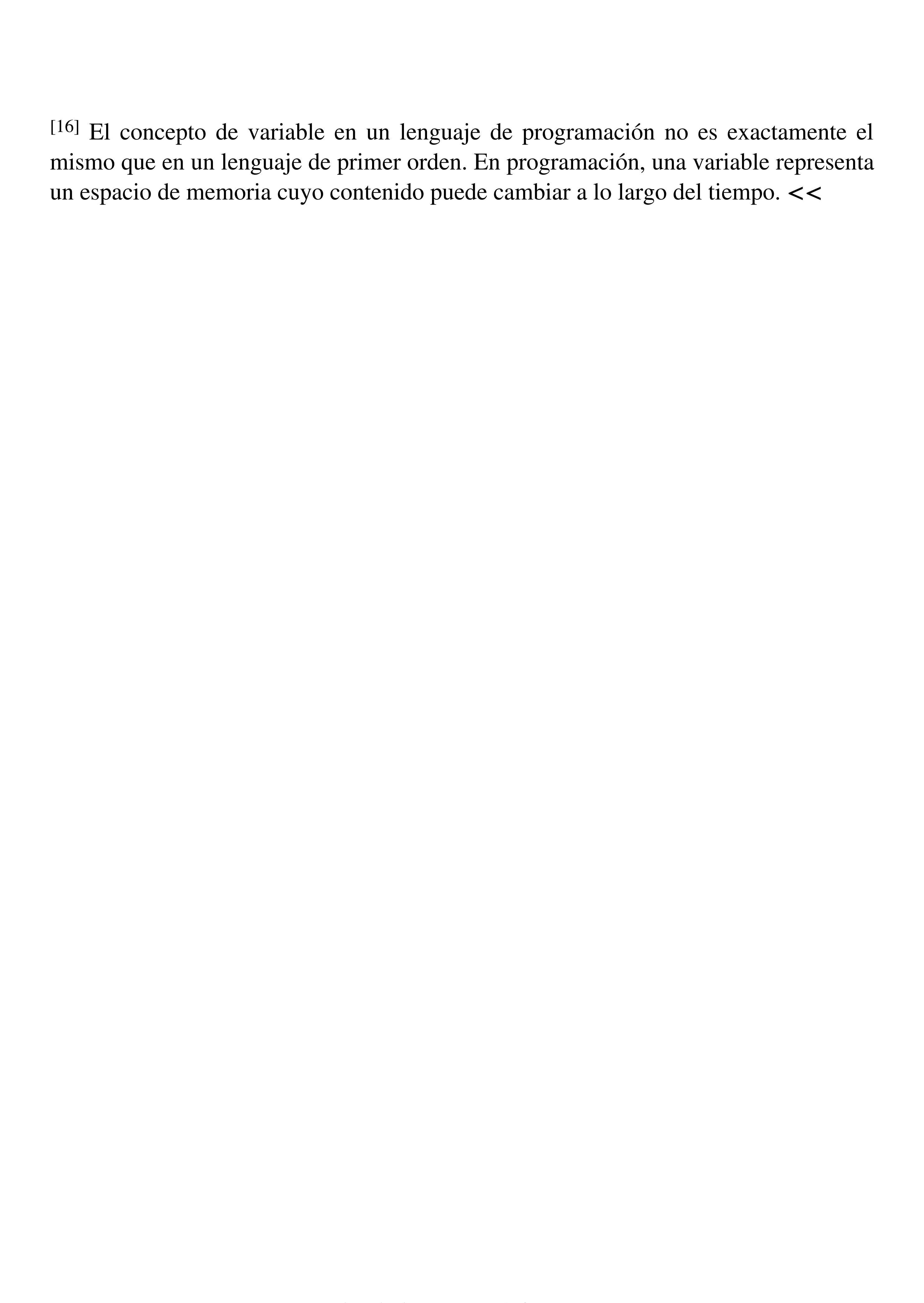
[12] Si tomamos $P(x)$ como $(x = \mathbf{n} \rightarrow \neg(x \text{ Dem neg}(\mathbf{p})))$ y $t = x$, el esquema L_4 dice que $\forall x(x = \mathbf{n} \rightarrow \neg(x \text{ Dem neg}(\mathbf{p}))) \rightarrow (x = \mathbf{n} \rightarrow \neg(x \text{ Dem neg}(\mathbf{p})))$ es un axioma. **<<**

[13] La fórmula $P \bigwedge Q$ es una abreviatura de $\neg(P \to \neg Q)$ así como $P \bigvee Q$ es una abreviatura de $\neg P \to Q$. <<

[14] El Teorema de la Deducción pide que en la demostración que lleva de ¬R a ¬CON no se aplique la regla de generalización a variables que sean libres en ¬R. Esto en efecto se cumple porque ¬R, al ser un enunciado, no tiene variables libres. <<



[15] En este punto es esencial el hecho de que el número 2 sea primo. Si la base de numeración no es un número primo la traducción al lenguaje formal, aunque también posible, es mucho más difícil de realizar <<



[16] El concepto de variable en un lenguaje de programación no es exactamente el mismo que en un lenguaje de primer orden. En programación, una variable representa un espacio de memoria cuyo contenido puede cambiar a lo largo del tiempo. <<

[17] El lenguaje que hemos descripto trabaja, en principio, con números naturales, pero también permite escribir programas que manipulen símbolos cualesquiera. Para ello, los símbolos que queremos manipular deben ser transformados previamente en números naturales mediante una codificación similar a la que mostramos en el capítulo 5. <<

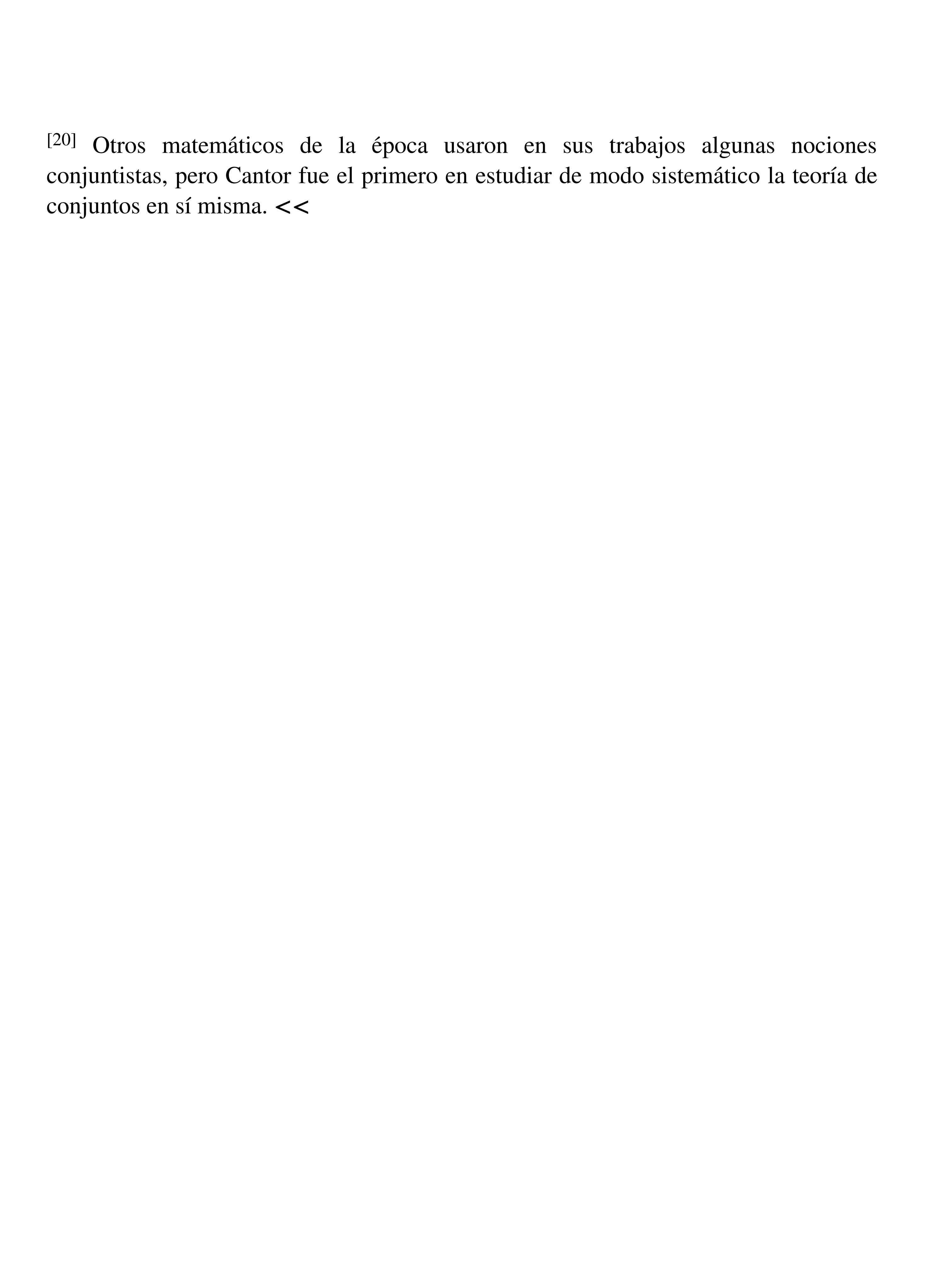
[18] Puede suceder que, para ciertas entradas, el programa P caiga en un lazo infinito y nunca entregue una salida. En ese caso, no existe un cómputo para esa entrada específica. Por ejemplo, el programa que consta de estas dos instrucciones:

[A] $X \Leftarrow X + 1$

Si $X \neq 0$ GOTO A

nunca entrega una salida cualquiera que sea la entrada *x*. <<

[19] Como la propiedad es recursiva, cualquiera que sea la entrada x_1, …, x_r, P siempre entregará un valor de salida 1 o 0 después de una cantidad finita de pasos. <<



[20] Otros matemáticos de la época usaron en sus trabajos algunas nociones conjuntistas, pero Cantor fue el primero en estudiar de modo sistemático la teoría de conjuntos en sí misma. <<

[21] «La forma determinada de lo completamente infinito» es una forma de referirse al infinito actual. <<

[22] «Agregado» o «conjunto», la palabra que usaba Cantor, en alemán, era «*Menge*». <<

[23] Por «función» debe entenderse aquí lo que Russell llamaba una *función proposicional* es decir, una fórmula con variables libres. Que una función pueda actuar como elemento indeterminado quiere decir que las variables pueden referirse también a fórmulas. **<<**

[24] Por ejemplo: «Todo número par entre 4 y 500 es suma de dos primos», que es finitista, equivale a «Para todo x, si x es par y no es la suma de dos primos entonces x no está entre 4 y 500», que es transfinito. <<

[25] «Concreta», es decir, «semántica». **<<**

[26] «Nuevos» en el sentido de que no sea posible obtenerlos de modo «finitista». **<<**

[27] Que la clase de los números de los axiomas sea *decidible* significa para Gödel que, cualquiera que sea el número **k**, o bien el enunciado «**k** es el número de un axioma» o bien su negación, es demostrable en Z. Del mismo modo, para las reglas de inferencia significa que el enunciado «$\mathbf{k}_1$ se deduce de $\mathbf{k}_2$, …, $\mathbf{k}_n$ por una única aplicación de una sola regla de inferencia», o bien su negación, es demostrable. **<<**



[28] «Tipos superiores» significa variables para clases, clases de clases, y así sucesivamente. <<



[29] En los conjuntos actualmente infinitos la noción de *cardinalidad* (introducida por G. Cantor en 1883) es la que reemplaza a la de *cantidad de elementos*. <<